Pochodna funkcji jednej zmiennej

Def:(pochodnej funkcji w punkcie)
Jeśli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ określona jest w pewnym otoczeniu punktu $x_0 \in D$ i istnieje skończona granica ilorazu różniczkowego: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x_0)-f(x)}{x-x_0}$ to funkcję $f(x)$ nazywamy różniczkowalną w punkcie x_0, a granicę $f'(x_0)$ pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0.

Def. (pochodnej jednostronnej)
Pochodną prawostronną (lewostronną) funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę prawostronną (lewostronną) ilorazu różnicowego

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

i oznaczamy odpowiednio przez $f'_+(x_0)$, $\big(f'_-(x_0)\big)$.

Warunek konieczny i dostateczny istnienia pochodnej:
Funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 wtw, gdy

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Pochodne funkcji elementarnych:

Lp.	Wzór 1	Wzór 2	Uwagi
1.	$(c)' = 0$		$c \in \mathbb{R}$
2.	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(\square^\alpha)' = \alpha \square^{\alpha-1} \cdot \square'$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$
3.	$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\left(\sqrt[n]{\square}\right)' = \frac{\square'}{n\sqrt[n]{\square^{n-1}}}$	$n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\};\ x > 0$
4.	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin \square)' = (\cos \square) \cdot \square'$	
5.	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos \square)' = (-\sin \square) \cdot \square'$	
6.	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} \square)' = \frac{\square'}{\cos^2 \square}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{N}$
7.	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} \square)' = -\frac{\square'}{\sin^2 \square}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{N}$
8.	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^\square)' = a^\square \cdot \ln a \cdot \square'$	$a > 0$
9.	$(e^x)' = e^x$	$(e^\square)' = e^\square \cdot \square'$	
10.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln \square)' = \frac{\square'}{\square}$	$x > 0$
11.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a \square)' = \frac{\square'}{\square \ln a}$	$a > 0,\ a \neq 0;\ x > 0$
12.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin \square)' = \frac{\square'}{\sqrt{1-\square^2}}$	$\|x\| < 1$
13.	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos \square)' = \frac{-\square'}{\sqrt{1-\square^2}}$	$\|x\| < 1$
14.	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} \square)' = \frac{\square'}{1+\square^2}$	
15.	$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} \square)' = \frac{-\square'}{1+\square^2}$	

Podstawowe wzory rachunku różniczkowego:
Jeśli funkcje $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $x_0 \in D$ to funkcje $f+g, f-g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ (o ile $g(x_0) \neq 0$) są różniczkowalne w $x_0 \in D$ oraz zachodzą wzory:
1) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,
2) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$,
3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, o ile $g(x_0) \neq 0$

4) $(f \circ g)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$,
5) $f^{-1}(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$ o ile $f'(x_0) \neq 0$.

Reguła de L'Hospitala:
Jeśli funkcje $f, g : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ są określone i różniczkowalne w jednym ze zbiorów postaci:
1) $D := (a, x_0) \quad -\infty \leq a < x_0 \leq +\infty$,
2) $D := (x_0, b) \quad -\infty \leq x_0 < b \leq +\infty$,
3) $D := (a, x_0) \cup (x_0, b) \quad -\infty \leq a < x_0 < b \leq +\infty$
oraz $g'(x_0) \neq 0$ dla każdego $x \in D$ i istnieją granice: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \{0, -\infty, +\infty\}$ oraz $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$ to istnieje granica $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ i

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Rodzaj przekształceń wykorzystywanych w obliczaniu granic za pomocą reguły L'Hospitala

Rodzaj nieoznaczoności	Stosowane przekształcenie	Otrzymana nieoznaczoność
$0 \cdot \infty$	$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ lub $f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$	$\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$
$\infty - \infty$	$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}$	$\frac{0}{0}$
$1^\infty,\ \infty^0,\ 0^0$	$f^g = e^{g \ln f}$	$0 \cdot \infty$

Równanie stycznej do wykresu funkcji:
Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 to istnieje niepionowa styczna do wykresu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) postaci:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Kąt przecięcia dwóch funkcji :
Jeżeli funkcje f i g posiadają punkt wspólny (x_0, y_0) oraz mają w tym punkcie pochodne właściwe to ostry kąt ϕ miedzy stycznymi do wykresów tych funkcji w punkcie x_0 wyraża się wzorem

$$\phi = \arctan \left| \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0)} \right|.$$

W przypadku gdy $1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0) = 0$ to styczne te są prostopadłe.
Uwaga: Ostry kąt ϕ miedzy stycznymi do wykresów funkcji w punkcie x_0 możemy również liczyć ze wzoru:

$$\phi = \beta - \alpha,$$

gdzie α to kąt pomiędzy styczną do funkcji f w punkcie x_0 a dodatnim kierunkiem osi Ox; β to kąt pomiędzy styczną do funkcji g w punkcie x_0 a dodatnim kierunkiem osi Ox.

Badanie przebiegu zmienności funkcji (etapy):

1) wyznacz dziedzinę funkcji,

2) zbadaj podstawowe własności funkcji tj. parzystość, nieparzystość, okresowość, punkty przecięcia wykresu funkcji z osiami współrzędnych,

3) wyznacz asymptoty (pionowe, poziome, ukośne) oraz oblicz granice na krańcach przedziału określoności i w otoczeniu punktów nieciągłości (granice jednostronne),

4) zbadaj pierwszą pochodną,

- **a)** oblicz pochodną funkcji,
- **b)** wyznacz miejsce zerowe-tu mogą być ekstrema lokalne funkcji,
- **c)** określ znak pochodnej – wyznaczamy przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji,

5) zbadaj drugą pochodną;

- **a)** wyznacz miejsca zerowe- tu mogą być punkty przegięcia,
- **b)** określ znak drugiej pochodnej-wyznaczamy przedziały wklęsłości i wypukłości funkcji oraz punkty przegięcia funkcji,

6) zbierz otrzymane informacje o funkcji w tabeli

7) sporządź wykresu funkcji.

Twierdzenie Lagrange'a:
Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, gdzie $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ jest ciągła w $[a, b]$ i różniczkowalną w przedziale (a, b) to istnieje $c \in (a, b)$ taka, że $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{a-b}$.

Wzór Taylora:
Jeżeli funkcja $f(x)$ ma $n-$tą pochodną $f^{(n)}(x)$ w pewnym przedziale domkniętym zawierającym punkt x_0, wówczas dla każdego x z tego przedziału ma miejsce następujący *wzór Taylora:*
$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}(x - x_0)^n$, gdzie $x_0 < c_n < x$ gdy $x > x_0$ lub $x < c_n < x_0$ gdy $x < x_0$.

- Ostatni wyraz we wzorze Taylora oznaczamy przez R_n i nazywamy resztą wzoru Taylora(podana wyżej reszta to reszta Lagrange'a).
- Wzór postaci:
  $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}+$
  $+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$ nazywamy szeregiem Taylora.
- Jeśli we wzorze Taylora przyjmiemy $x_0 = 0$ otrzymamy tzw. *wzór Maclaurina.*

Twierdzenie: Funkcja jest rozwijalna w szereg Taylora w przedziale$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, jeżeli wewnątrz tego przedziału:
a) funkcja ma pochodne każdego rzędu,
b) $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$, gdzie R_n oznacza resztę szeregu ze wzoru Taylora.

1. Korzystając z definicji obliczyć pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:
   a) $f(x) = x^2$; $x_0 \in \mathbb{R}$, b) $f(x) = \sin x$; $x_0 \in \mathbb{R}$, d) $f(x) = \frac{1}{1-x}$; $x_0 \neq 1$.
   e) $f(x) = \frac{3x-4}{2x-3}$; $x_0 = 2$, f) $f(x) = 2\sqrt{x^2+5}\ x_0 = 2$; g) $f(x) = \frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}\ x_0 = 0$.

2. Korzystając z definicji pochodnych jednostronnych sprawdzić czy istnieją pochodne funkcji:
   a) $f(x) = |x|$ w punkcie $x_0 = 0$; b) $f(x) = x|x|$ w punkcie $x_0 = 0$.

3. Korzystając ze wzorów na pochodną funkcji elementarnych, oblicz:
   (a) $f(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{5}{2}} + 2x^{-3}$ (b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{5}x^6$ (c) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$
   (d) $f(x) = (4x^2 - 2x\sqrt{x})(2x + \sqrt{x})$ (e) $f(x) = \frac{3}{2x-1}$ (f) $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{2x^2+4}$
   (g) $f(x) = (5x - x^5)^{10}$ (h) $f(x) = \frac{x^4\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x}}$ (i) $f(x) = \sqrt{x^2+2x-10}$
   (j) $f(x) = \cos 2x$ (k) $f(x) = e^{x^2+4}$ (l) $f(x) = \tan^2(3x-4)$
   (m) $f(x) = \ln \frac{3x+4}{x^2+1}$ (n) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ (o) $f(x) = 3^x x^3 + x^2 \log_5 x$
   (p) $f(x) = 2^x 3^x + x^2 - 1$ (q) $f(x) = \ln^3 x^2$ (r) $f(x) = 5^{\sin x}$
   (s) $f(x) = \frac{2^{3^x}}{3^{2^x}}$ (t) $f(x) = \arctan(\ln x)$ (u) $f(x) = 6\sqrt{\operatorname{arctg} x}$
   (v) $f(x) = \sqrt{x}\operatorname{arcctg} x$ (w) $f(x) = \ln\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)$ (x) $f(x) = \frac{e^x}{x^2+2}$
   (y) $f(x) = \ln \operatorname{arctg} e^{2x}$ (z) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ (a) $f(x) = \frac{e^{-3x^2}}{\operatorname{arcctg}\sqrt[3]{x}}$
   (b) $f(x) = e^{-x} \cdot \sqrt[4]{(x^3+1)^3} \cdot \sin^2 x$ (c) $f(x) = e^{\arccos\sqrt{1+\ln(2x-1)}}$ (d) $f(x) = \log_2(e^{2x}+1)$
   (e) $f(x) = 2(2x^2+5)\sqrt{x^2+1} + 3\ln(x + \sqrt{x^2+1})$ (f) $f(x) = 3\arcsin\frac{4}{3x+1} + 2\sqrt{4x^2+2x-2}$
   (g) $f(x) = \sqrt{(3+x)(2+x)} - \ln(\sqrt{4+x} + \sqrt{1+x})$ (h) $f(x) = \frac{\sqrt[5]{\sin x + \tan x}}{\cot \ln e^x}$
   (i) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(2^{4x} + x^2) + 4x^2\sin(\ln x)$ (j) $f(x) = \sqrt[6]{\frac{(x+4)^2\sqrt{x+2}}{\sqrt[7]{3x+4}}}$

4. Obliczyć pochodne :
   a) $f(x) = x^{\ln x}$ b) $f(x) = x^{x^2}$ c) $f(x) = 10x^{-3x}$ d) $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$
   e) $f(x) = \sqrt[x]{x^3 - 3x^2 + 2}$ f) $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$ g) $f(x) = \log_x \sin^2 x$ h) $f(x) = \frac{\sqrt[x]{x}}{\log_{\sqrt{x}} e^x}$.
   Wskazówka: w podpunktach a-f wykorzystać metodę pochodnej logarytmicznej, w podpunktach g-h zamianę podstawy logarytmu.

5. Oblicz pochodną aż do 6 rzędu z funkcji:
   a) $y = x^4 + 4x^2 - 1$, b) $y = x^6 - 4x^3 + 15x^2 - 16x + 5$, c) $y = \cos x$.

6. Oblicz podane granice korzystając z reguły de L'Hospitala:
   a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$,
   e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$, f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3-2x+1}{4x^3+2}$, g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^4}{e^{x^2}}$, h) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$,
   i) $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)e^{\frac{1}{x-2}}$, j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}\right)$, k) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$, l) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 - e^{2x})$,
   m) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \cdot \ln x$, n) $\lim\limits_{x\to 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}$, o) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{x^2}$ p) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

7. Napisz równanie stycznej do wykresu danej funkcji w podanym punkcie:
   a) $y = x^2 + 5x - 1$, $(x_0, y_0) = (1, 5)$, b) $y = \frac{3x-4}{2x-3}$, $(x_0, y_0) = (2, 2)$,
   c) $y = \sqrt{1+x^3}$, gdy $y_0 = 3$, d) $y = 2\sqrt{x^2+5}$; gdy $x_0 = 2$.

8. Obliczyć kąty, pod jakimi przecinają się wykresy funkcji:
   a) $f(x) = x^3 - x^2 + 4x + 1$, $g(x) = x + 4$; b) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 4^x$.

9. Wyznacz ekstrema lokalne i zbadaj monotoniczność poniższych funkcji:
a) $f(x) = -x^3 + x^2 - x$, b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$, c) $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x+3}$, d) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
e) $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$ f) $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ g) $f(x) = x^2 e^{-x}$ h) $f(x) = xe^{-\frac{2}{x}}$

10. Określ przedziały wypukłości i punkty przegięcia funkcji:
a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 10$, c) $f(x) = x^2 \ln x$, d) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

11. Wyznacz ekstrema globalne funkcji na odpowiednich przedziałach:
a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, \quad x \in [0, 10]$, b) $f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2, \quad x \in [\frac{1}{4}, 1]$.

12. Znajdź wszystkie możliwe asymptoty podanych funkcji:
a) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$, b) $f(x) = x \ln \frac{2x}{x-2}$, c) $f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x$, d) $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$

13. Narysuj wykres funkcji w oparciu o podane w tabeli informacje :
a)

x	$-\infty$	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$	$+\infty$
y'	0	+	X	-	0
y"		+	X	+	X
y	1		2		0

oraz $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$, $f'_+(1) = -1$.
b)

x	$-\infty$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 3/2)$	$3/2$	$(3/2, +\infty)$	$+\infty$
y'	0	+	X	+	0	-	0	-	-1
y"	0	+	X	-	-	-	0	+	+
y	2		X		0		-4		$-\infty$

oraz $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) + x + 3) = 0$.
c)

x	$-\infty$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$	$+\infty$
y'	1	+	0	+	X	-	0	+	1
y"		-	0	+	X	+	+	+	
y	$-\infty$		0		1		0		$+\infty$

oraz $\lim\limits_{x\to -\infty} (f(x) - x - 2) = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - x + 2) = 0$

14. Zbadaj przebieg zmienności funkcji:
a)$f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}$, b)$f(x) = x - \ln(x+1)$, c) $f(x) = x^3 + x^2 - 16x - 16$,
d) $f(x) = 2x - 3x^{\frac{2}{3}}$, e) $f(x) = \frac{1}{x} e^{-x}$, f) $f(x) = (x+1)^4 e^{-x}$.

15. Używając twierdzenia Lagrange'a wykazać, że $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$
16. Wykazać, że równanie $x^3 - 3x^2 + \frac{5}{3}x + 1 = 0$ ma tylko jeden pierwiastek.
17. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych funkcji:
    a) $\sqrt[3]{7.999}$, b) $\operatorname{arctg} 1,005$, c) $\sin 29^0$, e) $e^{0,04}$, $f)\frac{1}{\sqrt{3,98}}$
18. Napisz wzór Taylora z resztą Lagrange'a dla podanej funkcji, wskazanego punktu x_0 i liczby n :
    a) $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0,\ n = 5,$ b) $f(x) = e^x,\ x_0 = 0,\ n = 5,$
19. Rozwiń w szereg Taylora funkcję $f(x) = x^3 + 6x^2 - 1$ w otoczeniu punktu $x = 1$.
20. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = \ln(x + 1)$.
21. Stosując wzory Maclaurina oblicz:
    a) e z dokładnością 10^{-2}, b) $\ln 1.1$ z dokładnością 10^{-4}.
22. Oblicz jaki kąt tworzy z osią OX styczna do krzywej $y = x^2 - 3x - 6$ w $x = 1$.
23. Punkt materialny porusza się ze zmienną prędkością. Położenie tego punktu w chwili t jest opisane wzorem $x(t) = 3 \cdot 2^t + 2^{-3t}$. Oblicz przyśpieszenie punktu w chwili, w której jego prędkość jest równa 0.
24. Wytrzymałość belki o przekroju prostokątnym jest proporcjonalna do długości podstawy tego przekroju i proporcjonalna do kwadratu wysokości. Jak należy wyciąć belkę o największej wytrzymałości z pnia o średnicy 30cm?
25. Wśród wszystkich prostokątów o danym polu S znajdź ten o najmniejszym obwodzie.
26. Wśród wszystkich prostokątów o danym polu S znajdź ten o najmniejszej przekątnej.
27. Wśród wszystkich prostokątów wpisanych w okrąg o promieniu R znajdź ten o największym polu.
28. Znajdź największa objętość stożka o zadanej tworzącej l.
29. Policzyć największa objętość walca, którego całkowita powierzchnia jest równa S.