Wektory w przestrzeni

Jeżeli punkt $A = (x_A, y_A, z_A)$ jest początkiem wektora, a $B = (x_B, y_B, z_B)$ jego końcem, to

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A]$$

a długość wektora $\overrightarrow{AB}$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Warunek równoległości wektorów:
Wektory $\vec{u} = [x_u, y_u, z_u]$ i $\vec{v} = [x_v, y_v, z_v]$ są równoległe ($\vec{u} \parallel \vec{v}$) wtedy i tylko wtedy gdy mają proporcjonalne współrzędne czyli wtedy i tylko wtedy gdy $\frac{x_u}{x_v} = \frac{y_u}{y_v} = \frac{z_u}{z_v} \Leftrightarrow \exists_{\lambda \in \mathbb{R}}\ \vec{u} = \lambda \vec{v}$.
Warunek współpłaszczyznowości wektorów:
Wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ są współpłaszczyznowe wtedy i tylko wtedy gdy

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \exists_{\lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R}}\ \vec{w} = \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{u}.$$

Wersor niezerowego wektora $\vec{u} = [x_u, y_u, z_u]$ oznaczamy przez $\hat{u}$:

$$\hat{u} = \left[\frac{x_u}{|\vec{u}|}, \frac{y_u}{|\vec{u}|}, \frac{z_u}{|\vec{u}|}\right].$$

Wówczas

$$\vec{u} = [|\vec{u}|\cos\alpha, |\vec{u}|\cos\beta, |\vec{u}|\cos\gamma], \qquad \text{oraz} \qquad \hat{u} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma].$$

gdzie α, β, γ to kąty jakie wektor $\vec{u}$ tworzy z kolejnymi osiami układu współrzędnych.
Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$ będą dowolnymi wektorami w $\mathbb{R}^3$. **Iloczyn skalarny:**

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi, \quad \text{lub} \qquad \vec{u} \circ \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z;$$

gdzie φ jest kątem między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Rzut prostokątny $\vec{u}$ wektora $\vec{a}$ na wektor $\vec{b}$ wyraża się wzorem:$\vec{u} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|b|^2} \cdot \vec{b}$.

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$ to wektor $\vec{w}$:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}, \quad \text{oraz} \quad |\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \sin\varphi,$$

gdzie φ jest kątem między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Iloczyn mieszany wektorów $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$ $\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$ to liczba $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Zastosowanie iloczynu mieszanego: $P = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$– pole trójkąta, $P = |\vec{u} \times \vec{v}|$– pole równoległoboku $V = \frac{1}{6}|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$- objętość czworościanu $V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$- objętość prostopadłościanu.

1. W trapezie $OABC$, zachodzi $\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{CB}$. Wyraź:
   a) wektor $\overrightarrow{OA}$ przez wektory $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$, b) wektor $\overrightarrow{OB}$ przez wektory $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OC}$.

2. Dane są wektory $\vec{u} = [1, 0, -1]$, $\vec{v} = [2, -1, 3]$, $\vec{w} = [1, 1, 3]$ oraz punkty $A = (1, -1, 2)$, $B = (0, 2, 4)$, $C = (-1, -2, 3)$. Oblicz:
   a) $\vec{u} + \vec{v}$, b) $5\vec{u} - 4\vec{w}$, c) $3\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$ d) $\overrightarrow{AC}$
   e) $\overrightarrow{CA}$ f) $|\vec{u}|$ g) $|\overrightarrow{BA}|$ h) $|\vec{u} - \vec{v}|$
   i) $\vec{u} \circ \vec{w}$ j) $\vec{w} \circ \vec{u}$ j) $\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{BA}$

3. Dany jest wektor $\overrightarrow{AB} = [1, 4, 6]$. Wyznacz współrzędne punktu A wiedząc, że $B = (1, 5, -2)$.

4. Znajdź wektor o tym samym kierunku i zwrocie co wektor $\vec{u} = [2, -4, 8]$ ale o długości równej $2|\vec{u}|$.

5. Oblicz iloczyn skalarny wektorów:
   a) $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ b) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

6. Obliczyć iloczyn skalarny $\vec{u} \circ \vec{v}$ wiedząc, że
   a) $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$, $\angle(\vec{v}, \vec{u}) = \frac{\pi}{3}$, b) $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 4$, $\angle(\vec{v}, \vec{u}) = \frac{2\pi}{3}$,
   c) $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$, $\angle(\vec{v}, \vec{u}) = \frac{\pi}{2}$, d) $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 3$, $\angle(\vec{v}, \vec{u}) = \pi$.

7. Znaleźć długość wektora $\vec{u} = 2\vec{v} - 3\vec{w}$, wiedząc że wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe a ich długości $\vec{v} = 4$ i $\vec{w} = 2$.

8. Sprawdzić, czy punkty $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 3, 4)$, $C = (0, 3, 3)$ i $D = (5, 5, 5)$ są współpłaszczyznowe.

9. Czy wektory $\vec{u} = [-1, 3, 5]$, $\vec{v} = [1, -1, 1]$, $\vec{w} = [4, -2, 0]$ są komplanarne(współpłaszczyznowe).

10. Dane są punkty $A = (3, -1, 1)$, $B = (4, 3, 1)$. Znajdź wersor wektora $\overrightarrow{AB}$.

11. Znajdź długość i cosinusy kierunkowe wektorów $\vec{u} = [1, 1, 1]$ oraz $\vec{v} = [-1, 4, 5]$

12. Oblicz miary kątów pomiędzy wektorami:
    a) $\vec{u} = [-4, 8, -3]$ oraz $\vec{v} = [2, 1, 1]$ b) $\vec{u} = [2, -3, 0]$ oraz $\vec{v} = [-6, 0, 4]$

13. Oblicz $\vec{u} \times \vec{v}$:
    a) $\vec{u} = [-2, 1, 2]$, $\vec{v} = [1, 0, 2]$ b) $\vec{u} = [1, -1, -2]$, $\vec{v} = [-2, 2, 4]$
    c) $\vec{u} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ d) $\vec{u} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$

14. Wiedząc, że $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ oraz $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$ oblicz:
    a) $|(\vec{u} \times \vec{v}) + 2\vec{u} \times \vec{v}|$, b) $|(2\vec{u} + 3\vec{v}) \times (\vec{v} - \vec{u})|^2$.

15. Obliczyć iloczyn mieszany $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ wektorów:
    a) $\vec{u} = [1, 2, 0]$, $\vec{v} = [1, -2, -3]$, $\vec{w} = [0, 1, 3]$,
    b) $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ $\vec{v} = \vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{w} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$.

16. Zbadać, liniową niezależność następujących wektorów:
    a) $\vec{u_1} = [1, 1]$, $\vec{u_2} = [1, -1]$ b) $\vec{u_1} = [-1, 3]$, $\vec{u_2} = [2, -6]$
    c) $\vec{u_1} = [0, 1, 2]$, $\vec{u_2} = [0, 1, 3]$ d) $\vec{u_1} = [2, 1, 0]$, $\vec{u_2} = [1, 0, -1]$, $\vec{u_2} = [1, 1, 1]$
    e) $\vec{u_1} = [1, 2, 1]$, $\vec{u_2} = [0, 1, 1]$, $\vec{u_3} = [1, 1, 1]$ f) $\vec{u_1} = [0, 1, 1]$, $\vec{u_2} = [1, 2, 3]$, $\vec{u_3} = [1, 1, 1]$

17. Wyznaczyć pola trójkąta ABC :
    a) o wierzchołkach $A = (3, 1, 4), B = (1, 3, 5), C = (5, 3, 6)$
    b) o wierzchołkach $A = (0, 0, 2), B = (2, 1, 1), C = (-1, 1, 0)$
    c) rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{AB} = [1, -1, 1]$ i $\overrightarrow{AC} = [2, 1, -3]$.

18. Wyznaczyć pola równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{u} = [1, -3, 1]$ i $\vec{v} = [2, -1, 3]$.

19. Znajdź rzut prostokątny $\vec{u}$ wektora $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ na prosta wyznaczoną przez wektor $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ oraz kąt pomiędzy tymi wektorami.

20. Sprawdzić czy trójkąt o wierzchołkach A, B, C jest prostokątny:
    a) $A = (3, 2, 1),\ B = (-1, 6, 5),\ C = (5, 3, 2)$.

21. Znajdź długość wysokości trójkąta o wierzchołkach $A = (4, -4, 6),\ B = (1, 3, 0), C = (0, 5, -2)$ prostopadłej do boku łączącego dwa ostatnie wierzchołki.

22. Dla czworościanu o wierzchołkach $A = (1, 2, 1),\ B = (3, 2, 2),\ C = (2, 5, 2),\ D = (2, 3, 5)$ wyznaczyć objętość i długość jego wysokości opuszczonej z wierzchołka A.

23. Obliczyć pole i objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u} = [2, 3, 4],\ \vec{v} = [0, 4, -1]$, $\vec{w} = [5, 1, 3]$.

24. Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ wektory $\vec{u} = [0, 2, 1]$ i $\vec{v} = [1, p, 2p]$ są prostopadłe?

25. Wykazać, że jeżeli $\vec{u} + \vec{v}$ oraz $\vec{u} - \vec{v}$ są prostopadłe to wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równej długości.

26. Dla jakiego parametru $p \in \mathbb{R}$ punkty $A = (1, 1, 0),\ B = (0, 1, 1),\ C = (p, 1, 1)$ i $D = (0, 1, 2)$ leżą na jednej płaszczyźnie?

27. Oblicz iloczyn skalarny wektorów $\vec{u} = -2\vec{a} + 4\vec{b}$ i $\vec{v} = 3\vec{a} + \vec{b}$ jeżeli $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ oraz $|\vec{a}| = 3$ i $|\vec{b}| = 2$.