Pochodna funkcji jednej zmiennej

Definicja 1. (pochodnej funkcji w punkcie)
Jeśli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ określona jest w pewnym otoczeniu punktu $x_0 \in D$ i istnieje skończona granica ilorazu różniczkowego:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

to funkcję $f(x)$ nazywamy różniczkowalną w punkcie x_0, a granicę $f'(x_0)$ pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0.

Definicja 2. (pochodnej jednostronnej)
Pochodną prawostronną (lewostronną) funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę prawostronną (lewostronną) ilorazu różnicowego

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

i oznaczamy odpowiednio przez $f'_+(x_0)$, $\left(f'_-(x_0)\right)$.

Twierdzenie 1. *(warunek konieczny i dostateczny istnienia pochodnej)*
Funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 wtw, gdy

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Pochodne funkcji elementarnych:

Lp.	Wzór 1	Wzór 2	Uwagi
1.	$(c)' = 0$		$c \in \mathbb{R}$
2.	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(\Box^\alpha)' = \alpha \Box^{\alpha-1} \cdot \Box'$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
3.	$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\left(\sqrt[n]{\Box}\right)' = \frac{\Box'}{n\sqrt[n]{\Box^{n-1}}}$	$n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\};\ x > 0$
4.	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin \Box)' = (\cos \Box) \cdot \Box'$	
5.	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos \Box)' = (-\sin \Box) \cdot \Box'$	
6.	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} \Box)' = \frac{\Box'}{\cos^2 \Box}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{N}$
7.	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} \Box)' = -\frac{\Box'}{\sin^2 \Box}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{N}$
8.	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^\Box)' = a^\Box \cdot \ln a \cdot \Box'$	$a > 0$
9.	$(e^x)' = e^x$	$(e^\Box)' = e^\Box \cdot \Box'$	
10.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln \Box)' = \frac{\Box'}{\Box}$	$x > 0$
11.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a \Box)' = \frac{\Box'}{\Box \ln a}$	$a > 0,\ a \neq 0;\ x > 0$
12.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin \Box)' = \frac{\Box'}{\sqrt{1-\Box^2}}$	$\|x\| < 1$
13.	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos \Box)' = \frac{-\Box'}{\sqrt{1-\Box^2}}$	$\|x\| < 1$
14.	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} \Box)' = \frac{\Box'}{1+\Box^2}$	
15.	$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} \Box)' = \frac{-\Box'}{1+\Box^2}$	

Podstawowe wzory rachunku różniczkowego:
Jeśli funkcje $f, g : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $x_0 \in D$ to funkcje $f+g, f-g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ (o ile $g(x_0) \neq 0$) są różniczkowalne w $x_0 \in D$ oraz zachodzą wzory:

1) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;

2) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$;

3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, o ile $g(x_0) \neq 0$;

4) $(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) f'(x_0)$;

5) $f^{-1}(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$ o ile $f'(x_0) \neq 0$.

Twierdzenie 2. *(reguła de L'Hospitala)*
Jeśli funkcje $f, g : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ *są określone i różniczkowalne w jednym ze zbiorów postaci:*
1) $D := (a, x_0) \quad -\infty \leq a < x_0 \leq +\infty$,
2) $D := (x_0, b) \quad -\infty \leq x_0 < b \leq +\infty$,
3) $D := (a, x_0) \cup (x_0, b) \quad -\infty \leq a < x_0 < b \leq +\infty$
oraz $g'(x_0) \neq 0$ *dla każdego* $x \in D$ *i istnieją granice:* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \{0, -\infty, +\infty\}$ *oraz* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$ *to istnieje granica* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *i*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Uwaga 1. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla granic jednostronnych oraz niewłaściwych ($\pm\infty$).

Rodzaj przekształceń wykorzystywanych w obliczaniu granic za pomocą reguły L'Hospitala

Rodzaj nieoznaczoności	Stosowane przekształcenie	Otrzymana nieoznaczoność
$0 \cdot \infty$	$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ lub $f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$	$\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$
$\infty - \infty$	$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}$	$\frac{0}{0}$
$1^\infty,\ \infty^0,\ 0^0$	$f^g = e^{g \ln f}$	$0 \cdot \infty$

Równanie stycznej do wykresu funkcji:
Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 to istnieje niepionowa styczna do wykresu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) postaci:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Kąt przecięcia dwóch funkcji :
Jeżeli funkcje f i g posiadają punkt wspólny (x_0, y_0) oraz mają w tym punkcie pochodne właściwe to ostry kąt ϕ miedzy stycznymi do wykresów tych funkcji w punkcie x_0 wyraża się wzorem

$$\phi = \arctan\left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)\cdot g'(x_0)}\right|.$$

W przypadku gdy $1 + f'(x_0)\cdot g'(x_0) = 0$ to styczne te są prostopadłe.
Uwaga: Ostry kąt ϕ miedzy stycznymi do wykresów funkcji w punkcie x_0 możemy również liczyć ze wzoru:

$$\phi = \beta - \alpha,$$

gdzie α to kąt pomiędzy styczną do funkcji f w punkcie x_0 a dodatnim kierunkiem osi Ox; β to kąt pomiędzy styczną do funkcji g w punkcie x_0 a dodatnim kierunkiem osi Ox.

Asymptota pozioma:
Prosta $y = y_0$ jest asymptotą poziomą lewostronną (prawostronną) wykresu funkcji $f(x)$, jeśli $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$ $\quad (\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0)$, gdzie $y_0 \in \mathbb{R}$.

Asymptota pionowa:
Prosta $x = x_0$ jest asymptotą pionową lewostronną (prawostronną) wykresu funkcji $f(x)$, jeśli $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$ lub $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ $\quad (\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$ lub $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty)$.

Asymptota ukośna:
Prosta $y = ax+b$ gdzie $(a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$ jest asymptotą ukośną lewostronną (prawostronną) wykresu funkcji $f(x)$, jeśli $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$ $\quad (\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0)$, gdzie

$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad \text{i} \qquad b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - ax]$$

lub

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad \text{i} \qquad b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax].$$

Badanie przebiegu zmienności funkcji (etapy):

1) wyznacz dziedzinę funkcji,

2) zbadaj podstawowe własności funkcji tj. parzystość, nieparzystość, okresowość, punkty przecięcia wykresu funkcji z osiami współrzędnych,

3) wyznacz asymptoty (pionowe, poziome, ukośne) oraz oblicz granice na krańcach przedziału określoności i w otoczeniu punktów nieciągłości (granice jednostronne),

4) zbadaj pierwszą pochodną,

- **a)** oblicz pochodną funkcji,
- **b)** wyznacz miejsce zerowe-tu mogą być ekstrema lokalne funkcji,
- **c)** określ znak pochodnej – wyznaczamy przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji,

5) zbadaj drugą pochodną;

  a) wyznacz miejsca zerowe- tu mogą być punkty przegięcia,

  b) określ znak drugiej pochodnej-wyznaczamy przedziały wklęsłości i wypukłości funkcji oraz punkty przegięcia funkcji,

6) zbierz otrzymane informacje o funkcji w tabeli

7) sporządź wykresu funkcji.

1. Korzystając z definicji obliczyć pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:
a) $f(x) = x^2$; $x_0 \in \mathbb{R}$, b) $f(x) = \sin x$; $x_0 \in \mathbb{R}$, d) $f(x) = \frac{1}{1-x}$; $x_0 \neq 1$.
e) $f(x) = \frac{3x-4}{2x-3}$; $x_0 = 2$, f) $f(x) = 2\sqrt{x^2+5}$ $x_0 = 2$; g) $f(x) = \frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$ $x_0 = 0$.

2. Korzystając z definicji pochodnych jednostronnych sprawdzić czy istnieją pochodne funkcji:
a) $f(x) = |x|$ w punkcie $x_0 = 0$; b) $f(x) = x|x|$ w punkcie $x_0 = 0$.

3. Korzystając ze wzorów na pochodną funkcji elementarnych, oblicz:
(a) $f(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{5}{2}} + 2x^{-3}$ (b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{5}x^6$ (c) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$
(d) $f(x) = (4x^2 - 2x\sqrt{x})(2x + \sqrt{x})$ (e) $f(x) = \frac{3}{2x-1}$ (f) $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{2x^2+4}$
(g) $f(x) = (5x - x^5)^{10}$ (h) $f(x) = \frac{x^4\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x}}$ (i) $f(x) = \sqrt{x^2+2x-10}$
(j) $f(x) = \cos 2x$ (k) $f(x) = e^{x^2+4}$ (l) $f(x) = \tan^2(3x-4)$
(m) $f(x) = \ln \frac{3x+4}{x^2+1}$ (n) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ (o) $f(x) = 3^x x^3 + x^2 \log_5 x$
(p) $f(x) = 2^x 3^x + x^2 - 1$ (q) $f(x) = \ln^3 x^2$ (r) $f(x) = 5^{\sin x}$
(s) $f(x) = \frac{2^{3^x}}{3^{2^x}}$ (t) $f(x) = \arctan(\ln x)$ (u) $f(x) = 6\sqrt{\operatorname{arctg} x}$
(v) $f(x) = \sqrt{x}\operatorname{arcctg} x$ (w) $f(x) = \ln\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)$ (x) $f(x) = \frac{e^x}{x^2+2}$
(y) $f(x) = \ln \operatorname{arctg} e^{2x}$ (z) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ (a) $f(x) = \frac{e^{-3x^2}}{\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}}$
(b) $f(x) = e^{-x} \cdot \sqrt[4]{(x^3+1)^3} \cdot \sin^2 x$ (c) $f(x) = e^{\arccos\sqrt{1+\ln(2x-1)}}$ (d) $f(x) = \log_2(e^{2x}+1)$

4. Dla funkcji danych wzoram $f(x) = \ln \operatorname{tg} x^2$, $g(x) = \sqrt[5]{x^3}$ oblicz $f'(x), g'(x)$ oraz $f'(\sqrt{\frac{\pi}{4}})$, $g'(0)$.

5. Obliczyć pochodne :
a) $f(x) = x^{\ln x}$ b) $f(x) = x^{x^2}$ c) $f(x) = 10x^{-3x}$ d) $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$
e) $f(x) = \sqrt[x]{x^3 - 3x^2 + 2}$ f) $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$ g) $f(x) = \log_x \sin^2 x$ h) $f(x) = \frac{\sqrt[x]{x}}{\log_{\sqrt{x}} e^x}$.
Wskazówka: w podpunktach *a)-f)* wykorzystać metodę pochodnej logarytmicznej, w podpunktach *g)-h)* zamianę podstawy logarytmu.

6. Oblicz pochodną aż do 6 rzędu z funkcji:
a) $y = e^{2x}$, b) $y = x^6 - 4x^3 + 15x^2 - 16x + 5$, c) $y = \cos x$.

7. Oblicz podane granice korzystając z reguły de L'Hospitala:
a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$,
e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$, f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3-2x+1}{4x^3+2}$, g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^4}{e^{x^2}}$, h) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$,
i) $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)e^{\frac{1}{x-2}}$, j) $\lim\limits_{x\to 0-0} (\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2})$, k) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$, l) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 - e^{2x})$,
m) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \cdot \ln x$, n) $\lim\limits_{x\to 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}$, o) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{x^2}$ p) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

8. Napisz równanie stycznej do wykresu danej funkcji w podanym punkcie:
a) $y = x^2 + 5x - 1$, $(x_0, y_0) = (1, 5)$, b) $y = \frac{3x-4}{2x-3}$, $(x_0, y_0) = (2, 2)$,
c) $y = \sqrt{1+x^3}$, gdy $y_0 = 3$, d) $y = 2\sqrt{x^2+5}$; gdy $x_0 = 2$.

9. Oblicz jaki kąt tworzy z osią OX styczna do krzywej $y = x^2 - 3x - 6$ w $x = 1$.

10. Obliczyć kąty, pod jakimi przecinają się wykresy funkcji:
a) $f(x) = x^3 - x^2 + 4x + 1$, $g(x) = x + 4$; b) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 4^x$.

11. Wyznacz ekstrema lokalne i zbadaj monotoniczność poniższych funkcji:
a) $f(x) = -x^3 + x^2 - x$, b) $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 48x^2 - 48x - 2$, c) $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x+3}$,
d) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ e) $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$ f) $f(x) = x^2 e^{-x}$ g) $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$

12. Określ przedziały wypukłości i punkty przegięcia funkcji:
a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 10$, c) $f(x) = x^2 \ln x$, d) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

13. Wyznacz ekstrema globalne funkcji na odpowiednich przedziałach:
a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, \quad x \in [0, 10]$, b) $f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2, \quad x \in [\frac{1}{4}, 1]$.

14. Znajdź wszystkie możliwe asymptoty podanych funkcji:
a) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ b) $f(x) = \frac{x^2-4}{2x-3}$, c) $f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x$, d) $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$.

15. Zbadaj przebieg zmienności funkcji:
a)$f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}$, b)$f(x) = x - \ln(x+1)$, c) $f(x) = x^3 + x^2 - 16x - 16$,
d) $f(x) = 2x - 3x^{\frac{2}{3}}$, e) $f(x) = \frac{1}{x}e^{-x}$, f) $f(x) = (x+1)^4 e^{-x}$.

16. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych funkcji:
a) $\sqrt[3]{7.999}$, b) $\operatorname{arctg} 1,005$, c) $\sin 29^0$, e) $e^{0,04}$, $f)\frac{1}{\sqrt{3,98}}$

17. Punkt materialny porusza się ze zmienną prędkością. Położenie tego punktu w chwili t jest opisane wzorem $x(t) = 3 \cdot 2^t + 2^{-3t}$. Oblicz przyśpieszenie punktu w chwili, w której jego prędkość jest równa 0.

18. Wytrzymałość belki o przekroju prostokątnym jest proporcjonalna do długości podstawy tego przekroju i proporcjonalna do kwadratu wysokości. Jak należy wyciąć belkę o największej wytrzymałości z pnia o średnicy 30cm?

19. Policzyć największa objętość walca, którego całkowita powierzchnia jest równa S.