# Pochodna funkcji jednej zmiennej

1. Korzystając z definicji obliczyć pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:
   a) $f(x) = x^2;\ x_0 \in \mathbb{R}$, b) $f(x) = \sin x;\ x_0 \in \mathbb{R}$, c) $f(x) = \frac{1}{1-x};\ x_0 = -3$.
   d) $f(x) = \frac{3x-4}{2x-3};\ x_0 = 1$, e) $f(x) = 2\sqrt{x^2+5}\ x_0 = 2$; f) $f(x) = x^4,\ x_0 = 0$.

2. Korzystając z definicji pochodnych jednostronnych sprawdzić czy istnieją pochodne funkcji:
   a) $f(x) = |x|$ w punkcie $x_0 = 0$; b) $f(x) = x|x|$ w punkcie $x_0 = 0$.

3. Zbadaj różniczkowalność podanych funkcji w punkcie $x_0$ :
   a) $f(x) = \sqrt[3]{x},\quad x_0 = 0$ b) $f(x) = |x-4|,\quad x_0 = 4$ c) $f(x) = |x| + 4x,\quad x_0 = 0$

4. Korzystając ze wzorów na pochodną funkcji elementarnych, oblicz:
   1) $f(x) = -5x^4 + 5x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-3} + \sqrt[5]{x^3} + 7$
   2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{x^4\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x}} + 2\ln x - 4\sin x$
   3) $f(x) = (4x^2 - 2x\sqrt{x})(2x + \sqrt{x})$
   4) $f(x) = (3x^4 - 4x + 5)\cos x$
   5) $f(x) = 3^x x^3 + x^2 \log_5 x$
   6) $f(x) = \ln x \cdot \operatorname{arctg} x - 7\log_5 x \cdot \operatorname{ctg} x$
   7) $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{2x^2+4}$
   8) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$
   9) $f(x) = \frac{x^2 \cdot \cos x}{-2x^3+8x+1}$
   10) $f(x) = \cos 2x$
   11) $f(x) = e^{x^2+4}$
   12) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 10}$
   13) $f(x) = 6\sqrt{\operatorname{arctg} x}$
   14) $f(x) = (5x - x^5)^{10}$
   15) $f(x) = 5^{\sin x}$
   16) $f(x) = \operatorname{tg}^2(3x - 4)$
   17) $f(x) = \ln^5 \frac{3x+4}{x^2+1}$
   18) $f(x) = x^2 \cos e^{3x}$
   21) $f(x) = \ln \operatorname{arctg} e^{2x}$
   23) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$
   24) $f(x) = \log_2^7 (e^{2x} + 1)$
   25) $f(x) = e^{-x} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot \sin^2 x$

5. Dla funkcji danych wzoram $f(x) = \ln \operatorname{tg} x^2$, $g(x) = \sqrt[5]{x^3}$ oblicz $f'(x), g'(x)$ oraz $f'(\sqrt{\frac{\pi}{4}}),\ g'(0)$.

6. Korzystjąc z metody pochodnej logarytmicznej oblicz pochodne pochodne:
   a) $f(x) = x^{\ln x}$ b) $f(x) = x^{x^2}$ c) $f(x) = 10x^{-3x}$
   d) $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$ e) $f(x) = \sqrt[x]{x^3 - 3x^2 + 2}$ f) $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$

7. Oblicz pochodną aż do 6 rzędu z funkcji:
   a) $y = e^{2x}$, b) $y = x^6 - 4x^3 + 15x^2 - 16x + 5$, c) $y = \cos x$.

8. Oblicz podane granice korzystając z reguły de L'Hospitala:
   a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$,
   e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$, f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3-2x+1}{4x^3+2}$, g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^4}{e^{x^2}}$, h) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$,
   i) $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)e^{\frac{1}{x-2}}$, j) $\lim\limits_{x\to 0^-} (\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2})$, k) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$, l) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 - e^{2x})$,
   m) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \cdot \ln x$, n) $\lim\limits_{x\to 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}$, o) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{x^2}$ p) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

9. Napisz równanie stycznej do wykresu danej funkcji w podanym punkcie:
   a) $y = x^2 + 5x - 1,\ \ (x_0, y_0) = (1, 5)$, b) $y = \frac{3x-4}{2x-3},\ \ (x_0, y_0) = (2, 2)$,
   c) $y = \sqrt{1 + x^3}$, gdy $y_0 = 3$, d) $y = 2\sqrt{x^2 + 5}$; gdy $x_0 = 2$.

10. Wykaż, że krzywa $y = |\log_2 x|$ nie ma stycznej w punkcie $(1, 0)$.

11. Oblicz jaki kąt tworzy z osią OX styczna do krzywej $y = x^2 - 3x - 6$ w $x = 1$.

12. Obliczyć kąty, pod jakimi przecinają się wykresy funkcji:
a) $f(x) = x^3 - x^2 + 4x + 1,\ g(x) = x + 4;$ b) $f(x) = 2^x,\ g(x) = 4^x.$

13. Wyznacz ekstrema lokalne i zbadaj monotoniczność poniższych funkcji:
a) $f(x) = -x^3 + x^2 - x,$ b) $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 48x^2 - 48x - 2,$ c) $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x+3},$
d) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ e) $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$ f) $f(x) = x^2 e^{-x}$

14. Określ przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji:
a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2},$ b) $f(x) = 2x^3+3x^2-4x+10,$ c) $f(x) = x^2 \ln x,$ d) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$

15. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x)$ na wskazanych przedziałach:
a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1,\quad x \in [0, 10],$ b) $f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2,\quad x \in [\frac{1}{4}, 1].$

16. Znajdź wszystkie możliwe asymptoty podanych funkcji:
a) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ b) $f(x) = \frac{x^2-4}{2x-6},$ c) $f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x,$ d) $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}.$

17. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych funkcji:
a) $\sqrt[3]{7.999},$ b) $\operatorname{arctg} 1,005,$ c) $\sin 29^0,$ d) $e^{0,04},$ $e)\frac{1}{\sqrt{3,98}}$

18. Jeżeli funkcja $f$ jest dwukrotnie różniczkowalna na przedziale $(a, b)$. Ponadto dla $x_0 \in (a, b)$ zachodzą warunki $f'(x_0) = 0$ oraz $f''(x_0) = -4$, wówczas w punkcie $x_0$ mamy:
A) punkt przegięcia B) asymptotę pionową C) minimum lokalne D) maksimum lokalne

19. Jeżeli funkcja $f$ jest trzykrotnie różniczkowalna na przedziale $(a, b)$. Ponadto dla $x_0 \in (a, b)$ zachodzą warunki $f'(x_0) = f''(0) = 0$ oraz $f'''(x_0) = 2$, wówczas w punkcie $x_0$ mamy:
A) punkt przegięcia B) asymptotę pionową C) minimum lokalne D) maksimum lokalne

20. Jeżeli funkcja $f$ jest czterokrotnie różniczkowalna na przedziale $(a, b)$. Ponadto dla $x_0 \in (a, b)$ zachodzą warunki $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ oraz $f^{(4)}(x_0) = 3$, wówczas w punkcie $x_0$ mamy:
A) punkt przegięcia B) asymptotę pionową C) minimum lokalne D) maksimum lokalne

21. Pochodna lewostronna funkcji $f(x) = |2x - 2|$ w punkcie $x_0 = 1$ jest równa:
A) $-2$ B) 0 C) 2 D) nie istnieje

22. Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2-1}{2x^2+1}$ w punkcie $x_0 = 0$ wynosi:
A) 0 B) $-1$ C) $\frac{1}{2}$ D) 2

23. Jeżeli funkcja jest dwukrotnie różniczkowalna na przedziale $(a, b)$, ponadto $f'(x) > 0$ oraz $f''(x) < 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja jest w tym przedziale
A) rosnąca i wypukła B) rosnąca i wklęsła C) malejąca i wypukła D) malejąca i wklęsła

24. Jeżeli funkcja jest dwukrotnie różniczkowalna na przedziale $(a, b)$, ponadto $f'(x) \leq 0$ oraz $f''(x) < 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja jest w tym przedziale
A) rosnąca i wypukła B) nierosnąca i wklęsła C) malejąca i wypukła D) niemalejąca i wklęsła

25. Niech funkcja $f(x)$ będzie dwukrotnie różniczkowalna w punkcie $x_0$, ponadto $f'(x_0) = 0$ oraz $f''(x_0) < 0$ to funkcja posiada w punkcie $x_0$ :
A) minimum lokalne B) maksimum lokalne C) punkt przegięcia D) odpowiedzi A), B), C) są fałszywe

# Informacje pomocnicze

**Definicja 1.** (pochodna funkcji w punkcie)
Jeśli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ określona jest w pewnym otoczeniu punktu $x_0 \in D$ i istnieje granica ilorazu różnicowego:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

to granicę $f'(x_0)$ nazywamy pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0$.

Pochodną funkcji w punkcie możemy również wyznaczać w następujący sposób:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

**Definicja 2.** (różniczkowalność funkcji w punkcie)
Jeżeli w powyższej definicji granica ilorazu różnicowego:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

istnieje i jest skończona, to funkcję $f(x)$ nazywamy różniczkowalną w punkcie $x_0$. Liczbę $df(x_0)(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$ nazywamy różniczką funkcji $f$ w punkcie $x_0$ odpowiadającą przyrostowi $\Delta x$.

**Uwaga 1.** Mówiąc mniej formalnie, możemy zauważyć, że że różniczka funkcji $df(x_0)$ jest równa zmianie wartości stycznej w punckie $x$ następującej na odcinku od $x$ do $x + \Delta x$. Dlatego też dla małych wartości $\Delta x$ różniczka funkcji $df(x_0)$ jest bardzo dobrym przybliżeniem zmiany wartości funkcji $\Delta f$:

$$\Delta f \approx df(x_0)\Delta x.$$

A stąd i z przedstawionej wcześniej definicji różniczki różniczki dostajemy:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Na mocy $\Delta x = x - x_0$, ostatecznie otrzymujemy:

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

**Definicja 3.** (pochodnej jednostronnej)
Pochodną prawostronną (lewostronną) funkcji $f$ w punkcie $x_0$ nazywamy granicę prawostronną (lewostronną) ilorazu różnicowego

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

i oznaczamy odpowiednio przez $f'_+(x_0)$, $\big(f'_-(x_0)\big)$.

**Twierdzenie 1.** *(warunek konieczny i dostateczny istnienia pochodnej)*
*Funkcja $f$ ma pochodną w punkcie $x_0$ wtw, gdy*

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

**Pochodne funkcji elementarnych:**

| Lp. | Wzór 1 | Wzór 2 | Uwagi |
|---|---|---|---|
| 1. | $(c)' = 0$ | | $c \in \mathbb{R}$ |
| 2. | $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ | $(\square^\alpha)' = \alpha \square^{\alpha-1} \cdot \square'$ | $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ |
| 3. | $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ | $\left(\sqrt[n]{\square}\right)' = \frac{\square'}{n\sqrt[n]{\square^{n-1}}}$ | $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\};\ x > 0$ |
| 4. | $(\sin x)' = \cos x$ | $(\sin \square)' = (\cos \square) \cdot \square'$ | |
| 5. | $(\cos x)' = -\sin x$ | $(\cos \square)' = (-\sin \square) \cdot \square'$ | |
| 6. | $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $(\operatorname{tg} \square)' = \frac{\square'}{\cos^2 \square}$ | $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{N}$ |
| 7. | $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ | $(\operatorname{ctg} \square)' = -\frac{\square'}{\sin^2 \square}$ | $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{N}$ |
| 8. | $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ | $(a^\square)' = a^\square \cdot \ln a \cdot \square'$ | $a > 0$ |
| 9. | $(e^x)' = e^x$ | $(e^\square)' = e^\square \cdot \square'$ | |
| 10. | $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | $(\ln \square)' = \frac{\square'}{\square}$ | $x > 0$ |
| 11. | $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ | $(\log_a \square)' = \frac{\square'}{\square \ln a}$ | $a > 0,\ a \neq 0;\ x > 0$ |
| 12. | $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(\arcsin \square)' = \frac{\square'}{\sqrt{1-\square^2}}$ | $\|x\| < 1$ |
| 13. | $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(\arccos \square)' = \frac{-\square'}{\sqrt{1-\square^2}}$ | $\|x\| < 1$ |
| 14. | $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ | $(\operatorname{arctg} \square)' = \frac{\square'}{1+\square^2}$ | |
| 15. | $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$ | $(\operatorname{arcctg} \square)' = \frac{-\square'}{1+\square^2}$ | |

**Podstawowe wzory rachunku różniczkowego:**
Jeśli funkcje $f, g : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $x_0 \in D$ to funkcje $f+g, f-g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ (o ile $g(x_0) \neq 0$) są różniczkowalne w $x_0 \in D$ oraz zachodzą wzory:

1) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;

2) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$;

3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, o ile $g(x_0) \neq 0$;

4) $(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)$;

5) $f^{-1}(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$ o ile $f'(x_0) \neq 0$.

**Twierdzenie 2.** *(reguła de L'Hospitala)*
*Niech funkcje $f$ i $g$ będą określone, ciągłe i różniczkowalne na $O(x_0)$ przy czym $g'(x_0) \neq 0$. Ponadto niech istnieją granice $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \{0, +\infty, -\infty\}$ oraz właściwa lub niewłaściwa granica $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ oraz zachodzi:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Uwaga 2.** Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla granic jednostronnych oraz granic na $\pm\infty$.

**Rodzaj przekształceń wykorzystywanych w obliczaniu granic za pomocą reguły L'Hospitala**

| Rodzaj nieoznaczoności | Stosowane przekształcenie | Otrzymana nieoznaczoność |
|---|---|---|
| $0 \cdot \infty$ | $f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ lub $f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$ | $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$ |
| $\infty - \infty$ | $f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}$ | $\frac{0}{0}$ |
| $1^\infty,\ \infty^0,\ 0^0$ | $f^g = e^{g \ln f}$ | $0 \cdot \infty$ |

**Przykład 1.** Stosując regułę L'Hospitala oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^4-1)'}{(x-1)'} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{4x^3}{1} = \frac{4}{1} = 4,$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 13x}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin 13x)'}{(6x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{13\cos 13x}{6} = \frac{13}{6},$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - e^x + 1}{2x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin x - e^x + 1)'}{(2x^2)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x}{4x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\cos x - e^x)'}{(4x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x - e^x}{4} = \frac{-1}{4}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^{3x} - 3x - 1)'}{(\sin^2 5x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3e^{3x} - 3}{2\cdot 5 \sin 5x \cos 5x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{(3e^{3x} - 3)'}{(5 \sin 10x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{9e^{3x}}{5\cdot 10 \cos 10x} = \frac{9}{50}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(x\ln x)'}{(x + \ln x)'} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x + 1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty,$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = [O^0] \left\{ f^g = e^{g \ln f} \right\} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x \ln x}$

Najpierw obliczmy:

$\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = [0 \cdot +\infty] \left\{ f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}} \right\} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0.$

Zatem

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1.$

h) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\pi - x} \right) = [-\infty + \infty] \left\{ f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f\cdot g}} \right\} = \lim\limits_{x\to \pi^+} \frac{\pi - x - \sin x}{(\pi - x)\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to \pi^+} \frac{(\pi - x - \sin x)'}{((\pi - x)\sin x)'} =$
$\lim\limits_{x\to \pi^+} \frac{-1 - \cos x}{-\sin x + (\pi - x)\cos x} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to \pi^+} \frac{(-1 - \cos x)'}{(-\sin x + (\pi - x)\cos x)'} = \lim\limits_{x\to \pi^+} \frac{\sin x}{-2\cos x - (\pi - x)\sin x} = \frac{0}{2 + 0} = 0.$

**Równanie stycznej do wykresu funkcji:**

Jeśli funkcja $f$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0$ to istnieje niepionowa styczna do wykresu funkcji $f$ w punkcie $(x_0, y_0)$ postaci:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

**Kąt przecięcia dwóch funkcji :**
Jeżeli funkcje $f$ i $g$ posiadają punkt wspólny $(x_0, y_0)$ oraz mają w tym punkcie pochodne właściwe to ostry kąt $\phi$ miedzy stycznymi do wykresów tych funkcji w punkcie $x_0$ wyraża się wzorem

$$\phi = \arctan \left| \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0)} \right|.$$

W przypadku gdy $1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0) = 0$ to styczne te są prostopadłe.
Uwaga: Ostry kąt $\phi$ miedzy stycznymi do wykresów funkcji w punkcie $x_0$ możemy również liczyć ze wzoru:

$$\phi = \beta - \alpha,$$

gdzie $\alpha$ to kąt pomiędzy styczną do funkcji f w punkcie $x_0$ a dodatnim kierunkiem osi $Ox$; $\beta$ to kąt pomiędzy styczną do funkcji g w punkcie $x_0$ a dodatnim kierunkiem osi $Ox$.

**Pochodna logarytmiczna**

Dotychczas poznane wzory do obliczania pochodnych nie mają bezpośredniego zastosowania podczas obliczania pochodnej typu $f(x)^{g(x)}$ np. $(\sin x)^x$. Stosując dobrze znane wory: $a = e^{\ln a}$, $\ln a^n = n \cdot \ln a$, mamy:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)},$$

po czym stosując wzór na pochodną funkcji złożonej $\left(e^{\square}\right)' = e^{\square} \cdot \square'$ mamy:

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln f(x))' = f(x)^{g(x)} \left(g(x) \cdot \ln f(x)\right)'.$$

**Przykład 2.** Oblicz $((\sin x)^x)'$.

Rozwiązanie: Z powyższych rozważań mamy:

$$((\sin x)^x)' = \left(e^{x \cdot \ln \sin x}\right)' = e^{x \cdot \ln \sin x} \cdot (x \cdot \ln \sin x)' =$$
$$e^{x \cdot \ln \sin x} \left( \ln \sin x + x \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' \right) = e^{x \cdot \ln \sin x} \left( \ln \sin x + x \frac{\cos x}{\sin x} \right).$$

**Uwaga 3.** W celu obliczenia pochodnej $\left(\log_{f(x)} g(x)\right)'$ stosujemy wzór na zamianę podstawy logarytmu $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, mamy

$$\left(\log_{f(x)} g(x)\right)' = \left( \frac{\ln g(x)}{\ln f(x)} \right)$$

po czym korzystamy ze wzorów na pochodną ilorazu i złożenia.

**Monotoniczność funkcji**

**Twierdzenie 3.** *Niech funkcja $f$ będzie ciągła w przedziale $[a, b]$ oraz różniczkowalna w przedziale $(a, b)$. Wówczas:*

*a) jeżeli $f'(x) > 0$ w $(a, b)$,* **to** *funkcja jest ściśle (ostro) rosnąca w $[a, b]$*

*b) jeżeli $f'(x) < 0$ w $(a, b)$,* **to** *funkcja jest ściśle (ostro) malejąca w $[a, b]$.*

*c) jeżeli $f'(x) = 0$ w $(a, b)$,* **to** *funkcja jest stała w $[a, b]$.*

Wszystkie funkcje są funkcjami ciągłymi. Ponadto dla $x \neq 0$ $f'(x), g'(x), h'(x) > 0$, w punkcie $x = 0$ funkcja $f$ jest różniczkowalna i $f'(0) = 0, =$ . Dla funkcji $g'(0) = +\infty$, a funkcja i $h$ nie jest różniczkowalne w zerze. Natomiast wszystkie trzy funkcje rosną w całej swojej dziedzinie. Zatem warunek $f'(x) > 0$ jest **warunkiem dostatecznym**, a nie koniecznym.

**Twierdzenie 4.** *Niech funkcja $f(x)$ będzie określona na przedziale $[a, b]$ oraz różniczkowalna w $(a, b)$. Wówczas funkcja $f(x)$ jest:*

- *niemalejąca na przedziale $(a, b)$* **wtedy i tylko wtedy, gdy** $f'(x) \geq 0$;
- *nierosnąca na przedziale $(a, b)$* **wtedy i tylko wtedy, gdy** $f'(x) \leq 0$.

**Przykład 3.** Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji:
**a)** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 7$.
Funkcja ta jest różniczkowalna oraz

$$f'(x) = x^2 - 6x + 5 = (x - 5)(x - 1).$$

Stąd
$f'(x) > 0$ (funkcja monotonicznie rośnie) dla $x \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$, oraz
$f'(x) < 0$ (funkcja monotonicznie maleje) dla $x \in [1, 5]$.

**b)** $g(x) = \frac{x}{x^2-1}$.
Dziedzina funkcji g to: $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Funkcja jest różniczkowalna w $D_g$ oraz jej pochodna wynosi:

$$g'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 1) - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}.$$

Stąd
$g'(x) < 0$ (funkcja $g$ monotonicznie maleje ) dla każdego $x \in D_g$.

## Maksima i minima lokalne

**Definicja 4.** Mówimy, że funkcja $f$ określona na otoczeniu punktu $x_0$ ma w tym punkcie maksimum lokalne, jeżeli $f(x) \leq f(x_0)$ dla wszystkich $x$ z $S(x_0)$. Punkt $x_0$ nazywamy punktem lokalnego maksimum, a $f(x_0)$lokalnym maksimum.

Mówimy, że funkcja $f(x)$ określona na otoczeniu punktu $x_0$ ma w tym punkcie minimum lokalne, jeżeli $f(x) \geq f(x_0)$ dla wszystkich $x$ z $S(x_0)$. Punkt $x_0$ nazywamy punktem lokalnego minimum, a $f(x_0)$ lokalnym minimum.

Jeżeli w powyższej definicji zachodzą nierówności ścisłe (ostre) tzn. $f(x) < f(x_0)$ lub $f(x) > f(x_0)$ dla każdego $x$ z $S(x_0)$ to mówimy odpowiednio o ostrych (właściwych) maksimach, ostrych(właściwych) minimach lokalnych.

Minima i maksima lokalne nazywamy ekstremami lokalnymi.

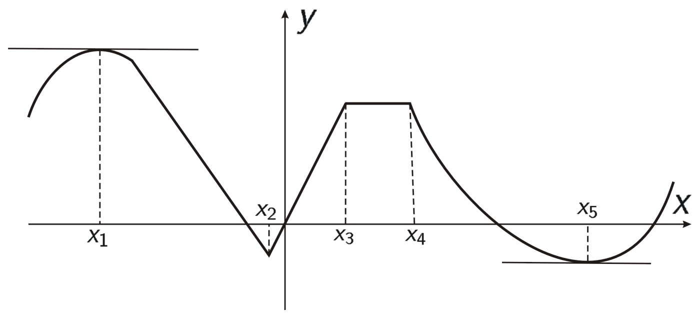
**Twierdzenie 5.** *(Fermata-warunek konieczny istnienia ekstremów)*
*Jeżeli funkcja posiada w punkcie $x_0$ ekstremum lokalne i jest w nim różniczkowalna to $f'(x_0) = 0$.*

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe np. $f(x) = x^3$.

**Uwaga 4.** Funkcja może mieć ekstrema lokalne tylko w punktach, w których jej **pochodna się zeruje** albo w punktach, w których jej **pochodna nie istnieje**. Punkty te nazywamy punktami krytycznymi.

**Przykład 4.** Funkcja $y = |x|$ nie posiada pochodnej w punkcie $x_0 = 0$, osiąga w nim minimum lokalne.

*Interpretacja geometryczna twierdzenia Fermata:* jeżeli funkcja $f$ ma ekstremum lokalne w punkcie $x_0$ oraz wykres funkcji $f$ posiada w tym punkcie styczną, to jest to prosta pozioma.

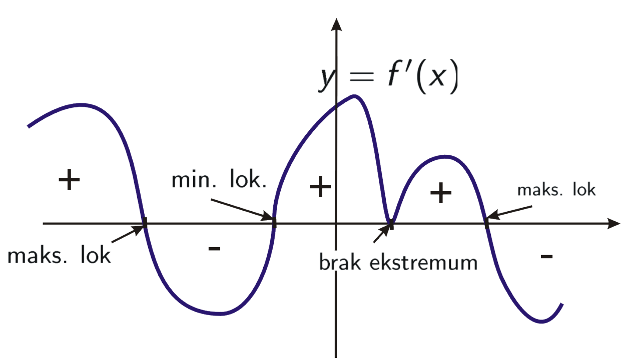



W punktach $x_1, x_5$ oraz dla $x \in (x_3, x_4)$ pochodna istnieje i $f'(x) = 0$ w punktach tych mamy ekstrema lokalne. Natomiast w punkcie $x_2$ pochodna nie istnieje, a mimo to mamy minimum lokalne.

**Twierdzenie 6.** *(pierwszy warunek wystarczający ekstremum)*
*Jeżeli funkcja $f$ jest ciągła w punkcie $x_0$ i posiada pochodną $f'(x)$ na pewnym $S(x_0)$, przy czym jeśli:*

*a) $f'(x) < 0$ dla $x \in S^-(x_0)$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in S^+(x_0)$, to funkcja ta ma w punkcie $x_0$ ostre (właściwe) minimum lokalne;*

*b) $f'(x) > 0$ dla $x \in S^-(x_0)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in S^+(x_0)$, to funkcja ta ma w punkcie $x_0$ ostre (właściwe) maksimum lokalne.*

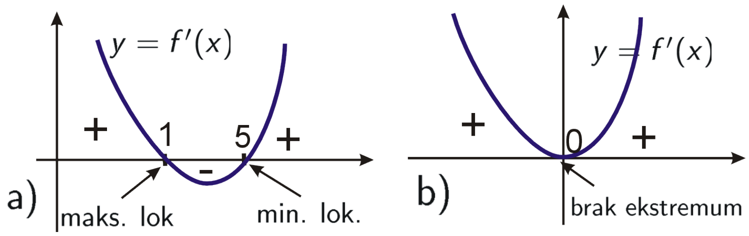



**Przykład 5.** Wyznacz ekstrema lokalne funkcji:
a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 7$; b) $f(x) = x^3$.

Rozwiązanie: a) Korzystając z twierdzenia Fermata szukamy punktów krytycznych na istnienie ekstremów loklanych:

$$f'(x) = x^2 - 6x + 5$$
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-5) = 0,$$

więc punktami krytycznymi są $x_1 = 1,\ x_2 = 5$.




Zatem (patrz rys a)) dla $x_1 = 1$ mamy maksimum loklane równe $f(1) = \frac{28}{3}$, a dla $x_2 = 5$ mamy minimum lokalne o wartości $f(5) = -\frac{4}{3}$.

b) Tutaj $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 = 0 \quad x = 0$, więc $x = 0$ jest punktem krytycznym na istnienie ekstremum. Natomias (patrz rys. b)) nie następuje zmiana znaku pierwszej pochodnej z prawej i lewej strony, więc w punkcie $x = 0$ nie ma ekstremum lokalnego.

**Twierdzenie 7.** *(drugi warunek wystarczający ekstremum )*
*Niech funkcja $f(x)$ będzie $n-$krotnie różniczkowalna w punkcie $x_0$ oraz $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Wówczas, jeśli:*

*a) $f^{(n)}(x_0) < 0$ oraz $n \geq 2$ jest liczbą parzystą, to funkcja posiada w punkcie $x_0$ ostre (właściwe) maksimum lokalne;*

*b) $f^{(n)}(x_0) > 0$ oraz $n \geq 2$ jest liczbą parzystą, to funkcja posiada w punkcie $x_0$ ostre (właściwe) minimum lokalne;*

*c) $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ oraz $n \geq 3$ jest liczbą nieparzystą, to funkcja nie posiada w punkcie $x_0$ ekstremum lokalnego.*

**Przykład 6.** Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Rozwiązanie: Dziedzina funkcji $f(x)$ to przedział $(0, +\infty)$. Liczymy pierwszą pochodną funkcji $f(x)$ :

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Przyrównujemy ją do zera:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = e.$$

Liczymy drugą pochodną: $f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$.
Liczymy znak wartości drugiej pochodnej w punkcie $x = e$ :

$$f''(e) = \frac{2\ln e - 3}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0,$$

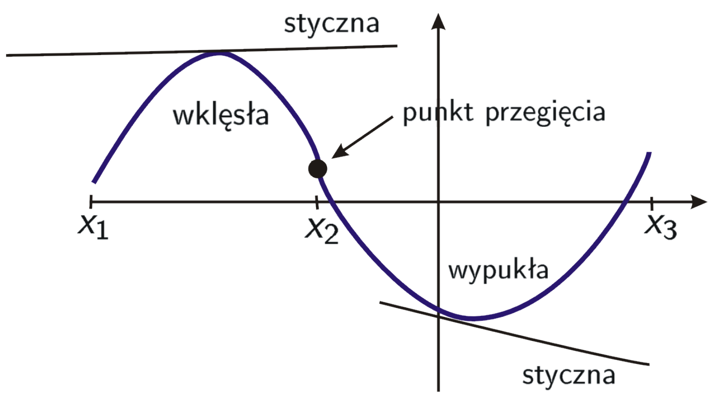
więc funkcja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ w punkcie $x = e$ posiada maksimum lokalne o wartości $f(e) = \frac{1}{e}$.

**Wypukłość, wklęsłość wykresu funkcji**

**Definicja 5.** Funkcja $f(x)$ jest wypukła (inaczej: wypukła do dołu) na przedziale $(a;b)$, jeżeli w każdym punkcie przedziału $(a,b)$ jej wykres leży nad styczną do wykresu funkcji.

**Definicja 6.** Funkcja $f(x)$ jest wklęsła (inaczej: wypukła do góry) na przedziale $(a;b)$, jeżeli w każdym punkcie przedziału $(a,b)$ jej wykres leży poniżej stycznej do wykresu funkcji.

**Definicja 7.** Niech funkcja $f(x)$ będzie ciągła w punkcie $x_0$. Mówimy, że punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji jeżeli w tym punkcie kończy się przedział wypukłości i zaczyna przedział wklęsłości lub odwrotnie.




**Twierdzenie 8.** *Jeżeli $f''(x) > 0$ dla każdego $x \in (a,b)$, to funkcja jest ściśle wypukła na $(a,b)$. Jeżeli $f''(x) < 0$ dla każdego $x \in (a,b)$, to funkcja jest ściśle wklęsła na $(a,b)$.*

**Twierdzenie 9.** *(Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia)*
*Funkcja $f(x)$ posiadająca w punkcie $x_0$ druga pochodną ma w punkcie $(x_0, f(x_0))$ punkt przegięcia, to*

$$f''(x_0) = 0.$$

**Twierdzenie 10.** *(I warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia)*
*Jeżeli funkcja posiada pochodną $f'(x_0)$ (także niewłaściwą) oraz druga pochodna $f''(x)$ ma przeciwne znaki w każdym punkcie lewego i prawego sąsiedztwa punktu $x_0$, to funkcja ma w punkcie $x_0$ punkt przegięcia.*

**Twierdzenie 11.** *(II warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia)*
*Jeżeli dla funkcji $f(x)$ są spełnione warunki:*

*1)* $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,

*2)* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, *gdzie $n \geq 3$ jest liczbą nieparzystą,*

*to funkcja $f(x)$ ma w punkcie $x_0$ punkt przegięcia.*

**Przykład 7.** Zbadaj wklęsłość, wypukłość funkcji $f(x) = (x^2+1)e^x$ oraz wyznacz punkty przegięcia jej wykresu.

Rozwiązanie: Liczymy pierwszą i drugą pochodną:

$$f'(x) = 2xe^x + (x^2+1)e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (x^2+2x+1)e^x;$$

$$f''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x+1)e^x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = (x^2+4x+3)e^x.$$

Ponieważ $e^x > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc $f''(x)$ ma taki sam charakter jak funkcja parabola $y = x^2+4x+3$, która ma miejsca zerowe $x_1 = -1$, $x_2 = -3$ przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ oraz wartości ujemne dla $x \in (-3, -1)$.

Wobec tego funkcja $f(x) = (x^2+1)e^x$:

a) jest wypukła na zbiorze $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$;

b) jest wklęsła na przedziale $x \in (-3, -1)$;

c) posiada dwa punkty przegięcia $(-3; 10e^{-3})$ oraz $(-1; 2e^{-1})$.

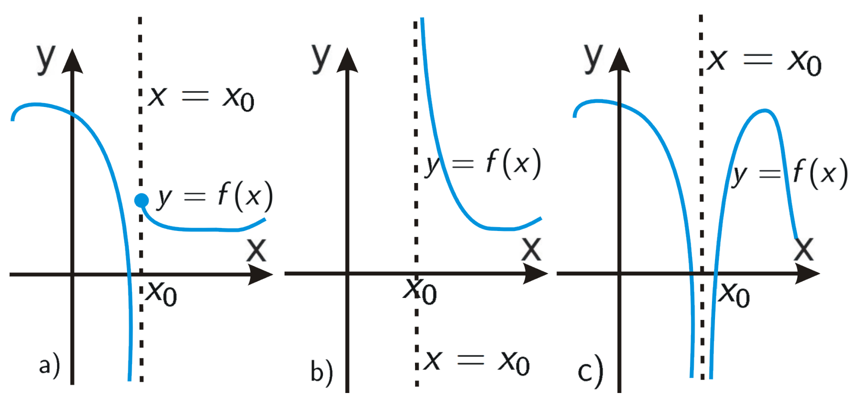
**Asymptoty funkcji**

**a) Asymptota pionowa**

Prosta $x = x_0$ jest asymptotą pionową lewostronną (prawostronną) wykresu funkcji $f(x)$, jeśli

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty\right)$$

Mówimy, że prosta $x = x_0$ jest asymptotą obustronną funkcji $f(x)$ gdy jest jednocześnie asymptotą lewostronną i prawostronną.




Rysunek 1: asymptota pionowa $x = x_0$ a)lewostronna b)prawostronna c)obustronna

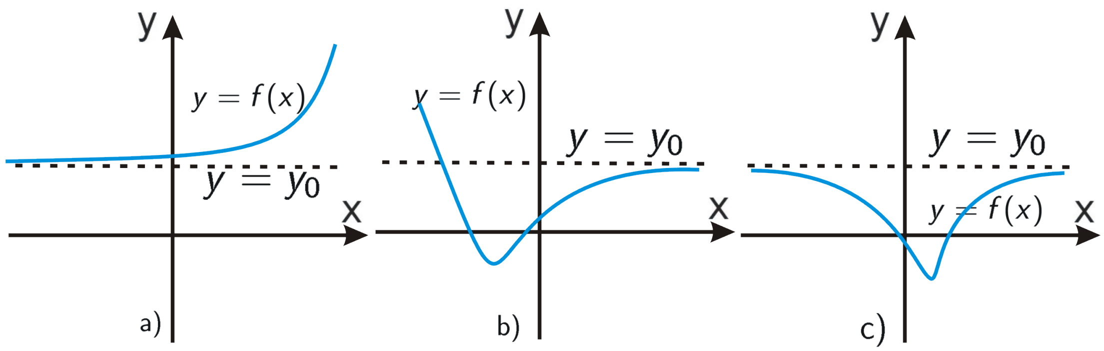
**b) Asymptota pozioma**

Prosta $y = y_0$ jest asymptotą poziomą lewostronną (prawostronną) wykresu funkcji $f(x)$, jeśli

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = y_0 \qquad \left(\lim_{x\to +\infty} f(x) = y_0,\right)$$

gdzie $y_0 \in \mathbb{R}$.

Mówimy, że prosta $y = y_0$ jest asymptotą poziomą obustronną funkcji $f(x)$ gdy jest jednocześnie asymptotą poziomą lewostronną i prawostronną.



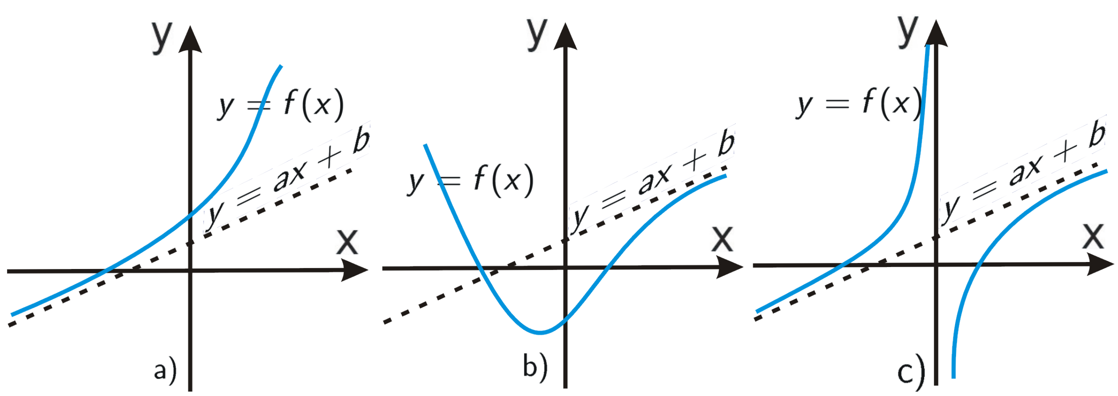

Rysunek 2: asymptota pozioma $y = y_0$ a)lewostronna b)prawostronna c)obustronna

**c) Asymptota ukośna**
Prosta $y = ax + b$ gdzie $(a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$ jest asymptotą ukośną lewostronną (prawostronną) wykresu funkcji $f(x)$, jeśli $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0 \quad (\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0)$, gdzie

$$a = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{i} \qquad b = \lim_{x\to\mp\infty}[f(x) - ax].$$

**Uwaga 5.** Granice $a, b$ muszą być właściwe oraz $a \neq 0$.

Mówimy, że prosta $y = y_0$ jest asymptotą poziomą obustronną funkcji $f(x)$ gdy jest jednocześnie asymptotą poziomą lewostronną i prawostronną.




Rysunek 3: asymptota ukośna $y = ax + b$ a)lewostronna b)prawostronna c)obustronna

**Uwaga 6.** Istnienie asymptoty poziomej wyklucza istnienie asymptoty ukośnej po tej samej stronie osi $Oy$.

**Przykład 8.** Zbadaj istnienie asymptot dla funkcji

$$f(x) = \frac{2x - 5}{x - 3}.$$

Rozwiązanie:
**a) asymptota pionowa:** Ponieważ dziedziną funkcji $f(x)$ jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, więc asymptota pionowa może istnieć tylko w $x_0 = 3$. Liczymy odpowiednie granice jednostronne. Ponieważ:
$\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to3^-} \frac{2x-5}{x-3} = \left\{\frac{1}{0^-}\right\} = -\infty;$
oraz
$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+} \frac{2x-5}{x-3} = \left\{\frac{1}{0^+}\right\} = +\infty;$

Stąd istnieje granica lewostronna i prawostronna pionowa $x = 3$, Zatem istnieje granica obustronna pionowa $x = 3$.

**b) asymptota pozioma:** W celu zbadania asymptoty poziomej liczymy granice:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-5}{x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x(2-\frac{5}{x})}{x(1-\frac{3}{x})} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{5}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 2$
oraz
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-5}{x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x(2-\frac{5}{x})}{x(1-\frac{3}{x})} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{5}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 2$
Stąd istnieje granica lewostronna i prawostronna pozioma $y = 2$, Zatem istnieje granica obustronna pozioma $y = 2$.

**c) asymptota ukośna:** brak asymptoty ukośnej, gdyż istnieje asymptota pozioma.

**Przykład 9.** Zbadaj istnienie asymptoty pionowej, ukośnej dla funkcji

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}.$$

Rozwiązanie:
**a) asymptota pionowa:** Ponieważ dziedziną funkcji $f(x)$ jest zbiór $\mathbb{R}$ więc asymptota pionowa nie istnieje
**b) asymptota pozioma** W celu zbadania asymptoty poziomej liczymy granice:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2(x+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = -\infty;$
oraz
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2(x+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = +\infty.$
Stąd nie istnieje ani granica lewostronna, ani prawostronna pozioma.

**c) asymptota ukośna** W celu zbadania asymptoty ukośnej liczmy granice (jednocześnie dla $-\infty$ oraz dla $+\infty$): $a = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1}{x^3+x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3(1+\frac{1}{x^3})}{x^3(1+\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1.$
Jest to granica właściwa więc liczymy $b$ :
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - ax\big) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(\frac{x^3+1}{x^2+1} - 1 \cdot x\big) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1-x^3-x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-x+1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = 0.$
Zatem mamy asymptotę ukośną obustronną: $y = x$.