

Zadania przygotowujące do sprawdzianu nr 5

1. Korzystając z interpretacji całki oznaczonej oblicz pole obszaru D ograniczonego:

a) $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$ oraz oś Ox ;

b) $y = x$, $y = 2x$, $y = \frac{2}{x}$;

c) $y^2 = x$, $x^2 = 8y$.

2. Oblicz długość łuku krzywej: $y = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ dla $1 \leq x \leq 4$.

3. Wyznacz wartość średnią funkcji $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ na przedziale $[0, 4]$.

4. Znajdź wszystkie ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych (również ich wartości):

$$a) f(x, y) = 4x^2y + 24xy + y^2 + 32y - 6, \quad b) f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 6xy + 1.$$

5. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanych funkcji:

$$a) f(x, y) = \arctg^3 \frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}; \quad b) f(x, y, z) = (y + \sin 3x)^{zy^2}; \quad c) f(x, y) = \ln \sqrt{e^{x^2} \cdot \sin y}.$$

6. Oblicz pochodną kierunkową podanej funkcji w punkcie (x_0, y_0) i określonym kierunku:

a) $f(x, y) = 3x^4 + xy + y^3$, $(x_0, y_0) = (-2, 1)$, w kierunku wektora najszybszego wzrostu;

b) $f(x, y) = x^2e^{3y} + y \ln 2x$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$ w kierunku punktu $(x_1, y_1) = (3, -1)$.

7. Napisz równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ w punkcie styczności $P_0 = (0, 1, z_0)$.