# Zadania przygotowujące do sprawdzianu nr 3

1. Korzystając z definicji obliczyć pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:
   a) $f(x) = x^3, \quad x_0 \in \mathbb{R}$,    b) $f(x) = \cos x, \quad x_0 \in \mathbb{R}$,
   c) $f(x) = \frac{2x-2}{x+3}, \quad x_0 = -2$,    d) $f(x) = \sqrt{x^2+3}, \quad x_0 = 1$.

2. Korzystając z definicji pochodnych jednostronnych sprawdzić czy istnieją pochodne funkcji:
   a) $f(x) = |x+4|$ w punkcie $x_0 = -4$,    b) $f(x) = 2x + 3|x|$ w punkcie $x_0 = 0$,
   c) $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$ w punkcie $x_0 = 0$,    d) $f(x) = 2x + x|x|$ w punkcie $x_0 = 0$.

3. Oblicz pochodne podanych funkcji:
   a) $f(x) = x^3 \sin x + e^x \operatorname{tg} x + \ln 3x$,    b) $f(x) = \sqrt[4]{3x^3 + 2x + 4}$,
   c) $f(x) = \sqrt[5]{\frac{x \cos x}{1 + 2\sin x}}$,    d) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x^2}{1+x^2}$,
   e) $f(x) = \ln \left(\frac{x^2}{2x+3}\right)^5$,    f) $f(x) = \ln(\operatorname{arctg} e^{2x})$,
   g) $f(x) = \operatorname{arctg}^8(4x^2+6)$,    h) $f(x) = \cos^5(x^3 \cdot e^x)$,
   i) $f(x) = (x + \sin 2x)^{x^2}$,    j) $f(x) = (x^2+4x)^{2 \operatorname{tg} x}$.

4. Korzystając z reguły de L'Hospitala oblicz poniższe granice funkcji:
   a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}$,    b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$,    c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3}$,    d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x(e^x - 1)}$,
   e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x$,    f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x \cdot \ln x$,    g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$,    h) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.

5. Wyznacz ekstrema lokalne i zbadaj monotoniczność funkcji:
   a) $f(x) = \frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 18x - 1$,    b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x}$,    c) $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$,
   d) $f(x) = xe^{-3x}$,    e) $f(x) = x \ln^2 x$.

6. Zbadaj wklęsłość, wypukłość wykresu funkcji oraz wyznacz punkty przegięcia:
   a) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$,    b) $f(x) = \ln(1+x^2)$,    c) $f(x) = x^2 e^{-x}$.

7. Korzystając z definicji różniczki funkcji oblicz przybliżoną wartość wyrażeń:
   a) $\sqrt[5]{31,98}$,    b) $\frac{1}{\sqrt[3]{8,04}}$,    c) $\arcsin 0,48$,    d) $\cos 63^\circ$.

8. Znaleźć największą i najmniejsza wartość funkcji $f(x)$ na wskazanym przedziale:
   a) $f(x) = x^2 \ln x$, na przedziale $[1, e]$,    b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + \operatorname{arctg} x$, na przedziale $[0, 2]$.

9. Wyznacz wszystkie możliwe asymptoty podanych funkcji (pozioma, pionowa, ukośna):
   a) $f(x) = \frac{3x^4+1}{x^3}$,    b) $g(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-4}$,    c) $g(x) = x + \operatorname{arctg} x$.

10. Wyznacz pochodną funkcji $f(x) = \ln x^3$ w punkcie $x_0 = 3$.

11. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$ w punkcie $x_0 = 1$.