Zadania przygotowujące do sprawdzianu nr 2

1. W oparciu o definicję Heine'go granic funkcji wykazać, że:
   (a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4x}-x)=-2.$

2. Wykazać na podstawie definicji Heine'go, że nie istnieją granice funkcji:
   (a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{|x-1|}$, (b) $\lim\limits_{x\to -3}4^{\frac{1}{x+3}}$, (c) $\lim\limits_{x\to 4}\cos\frac{1}{x-4}$,

3. Oblicz granice funkcji lub korzystając z granic jednostronnych wykaż, że nie istnieją:
   (a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^3-x^2-4x+4}$ (b) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^4+2x^3-2x^2-9}{2x^3+5x^2+9}$ (c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{2-3x}}$ (d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2+3x-1}\right)$
   (e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\arcsin 3x}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{|x|}{x}}$ (g) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x^2}$ (h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+5}{x^2+2}\right)^{-4x^2}$
   (i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}4x}{\sin 5x}$ (j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6^x-3^x}{2x}$ (k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^x-1}{\arcsin 2x}$ (l) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 4x)^{\frac{3}{x}}$
   (m) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x}}{x-2}$ (n) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(3x-\pi)}{\frac{2}{3}\pi-2x}$ (o) $\lim\limits_{x\to-2}[x+2]$ (p) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\operatorname{tg}2x+1)}{\sin 3x}$.

4. Na mocy twierdzenia o trzech granicach wykaż, że
   (a) $\lim\limits_{x\to 3^-}(x-3)\cos\frac{1}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2[x]-1}{[x]+4}=2$

5. Zbadaj ciągłość funkcji w dziedzinie, w punktach nieciągłości określ rodzaj nieciągłości:
   a) $f(x)=\begin{cases} x & \text{dla } x\le 0\\ \frac{x}{x-1} & \text{dla } 0<x<1\\ x^2-2 & \text{dla } x\ge 1\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} \frac{4}{2+e^{\frac{1}{x-1}}} & \text{dla } x<1\\ 1+\log x & \text{dla } 1\le x<10\\ \frac{5}{x} & \text{dla } x\ge 10\end{cases}$
   c) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{dla } x<0\\ 4 & \text{dla } x=0\\ \frac{|x|+x}{4x} & \text{dla } x>0\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} \cos\frac{1}{x-2} & \text{dla } x<2\\ x+3 & \text{dla } x\ge 2.\end{cases}$

6. Dobrać parametry tak, aby podane funkcje były ciągłe na całej swojej dziedzinie:
   (a) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin ax}{3x} & \text{dla } x\ne 0\\ a & \text{dla } x=0\end{cases}$ (b) $g(x)=\begin{cases} 2b+e^{\frac{1}{x}} & \text{dla } x<0\\ 4 & \text{dla } x=0\\ \frac{x^2+4ax}{|x|} & \text{dla } x>0.\end{cases}$

7. Wykaż, że funkcja $f(x)=\sin\frac{\pi x}{2}+2x^3-\frac{1}{3}$ posiada przynajmniej jedno miejsce zerowe w przedziale $(-1,1)$.