Legalna ściąga na sprawdziany

Uwaga: Zabrania się korzystania z innych materiałów jak również dopisywania dodatkowych informacji.

Symbole nieoznaczone: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0.

Granice niektórych ciągów:

$a)$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}=+\infty,\ \alpha>0$ $b)$ $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=0,\ |a|<1$ $c)$ $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=\infty,\ a>1$

$d)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}=1,\ a>0$ $e)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}=1$ $f)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}}{a^n}=0\ \alpha>0,\ a>1$

$g)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n}=0,\ n>1$ $h)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}=\infty$ $i)$ $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=\infty,\ a>1$

$j)$ $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ $k)$ $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=e^{-1}$ $l)$ $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^n=e^a$

$m)$ $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{a_n}=e$ o ile (a_n) to ciąg zbieżny do granicy niewłaściwej $+\infty$ lub $-\infty$.

Monotoniczność ciągu:

$a_{n+1}-a_n$	$\frac{a_{n+1}}{a_n}$	monotoniczność
>0	>1	rosnący
$=0$	$=1$	stały
<0	<1	malejący
≥ 0	≥ 1	niemalejący
≤ 0	≤ 1	nierosnący

Tabelka odczytywania wartości pewnych wyrażeń:

$a+\infty=\infty,\ -\infty<a\leq\infty$	$a\cdot\infty=\infty,\ 0<a\leq\infty$
$\frac{a}{\infty}=0,\ -\infty<a<\infty$	$\frac{a}{0^+}=\infty,\ 0<a\leq\infty$
$\frac{a}{0^+}=-\infty,\ -\infty\leq a<0$	$\frac{a}{0^-}=-\infty,\ 0<a\leq\infty$
$\frac{a}{0^-}=\infty,\ -\infty\leq a<0$	
$a^{\infty}=0,\ 0^+\leq a<1$	$a^{\infty}=\infty, 1<a\leq\infty$
$\infty^a=0,\ -\infty\leq a<0$	$\infty^a=\infty,\ 0<a\leq\infty$

Granice podstawowych wyrażeń nieoznaczonych:

$a)$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,$ $b)$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\ \alpha>0$ $c)$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0$

$d)$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,\ 0<a\neq1$ $e)$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a,\ a\in\mathbb{R}$ $f)$ $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

$g)$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a,\quad a\in\mathbb{R}$ $h)$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$ $i)$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$

Asymptota ukośna $y=ax+b$, gdzie $a=\lim\limits_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{x}$ i $b=\lim\limits_{x\to\mp\infty}[f(x)-ax]$.

Pochodne funkcji elementarnych:

Lp.	Wzór 1	Wzór 2	Uwagi
1.	$(c)'=0$		$c\in\mathbb{R}$
2.	$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$	$(\square^{\alpha})'=\alpha\square^{\alpha-1}\cdot\square'$	$\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
3.	$(\sqrt[n]{x})'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\left(\sqrt[n]{\square}\right)'=\frac{\square'}{n\sqrt[n]{\square^{n-1}}}$	$n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\};\ x>0$
4.	$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin\square)'=(\cos\square)\cdot\square'$	
5.	$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos\square)'=(-\sin\square)\cdot\square'$	
6.	$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg}\square)'=\frac{\square'}{\cos^2\square}$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{N}$
7.	$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg}\square)'=-\frac{\square'}{\sin^2\square}$	$x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{N}$
8.	$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$	$(a^{\square})'=a^{\square}\cdot\ln a\cdot\square'$	$a>0$
9.	$(e^x)'=e^x$	$(e^{\square})'=e^{\square}\cdot\square'$	
10.	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\ln\square)'=\frac{\square'}{\square}$	$x>0$
11.	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$(\log_a\square)'=\frac{\square'}{\square\ln a}$	$a>0,\ a\neq0;\ x>0$
12.	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin\square)'=\frac{\square'}{\sqrt{1-\square^2}}$	$|x|<1$
13.	$(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos\square)'=\frac{-\square'}{\sqrt{1-\square^2}}$	$|x|<1$
14.	$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg}\square)'=\frac{\square'}{1+\square^2}$	
15.	$(\operatorname{arcctg} x)'=\frac{-1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg}\square)'=\frac{-\square'}{1+\square^2}$	

Przekształcenie: $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$

Równanie stycznej do wykresu funkcji: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Kąt przecięcia dwóch funkcji :

$$\phi=\arctan\left|\frac{f'(x_0)-g'(x_0)}{1+f'(x_0)\cdot g'(x_0)}\right|.$$

W przypadku gdy $1+f'(x_0)\cdot g'(x_0)=0$ to styczne te są prostopadłe.

Wzór na przybliżone wartości: $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

Rodzaj przekształceń wykorzystywanych w obliczaniu granic za pomocą reguły L'Hospitala

Rodzaj nieoznaczoności	Stosowane przekształcenie	Otrzymana nieoznaczoność
$0 \cdot \infty$	$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ lub $f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$	$\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$
$\infty - \infty$	$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}$	$\frac{0}{0}$
$1^\infty,\ \infty^0,\ 0^0$	$f^g = e^{g \ln f}$	$0 \cdot \infty$

Tabela całki neoznaczonej:

Lp.	Wzór	Uwagi
1.	$\int dx = x + c$	
2.	$\int a dx = ax + c$	
3.	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
4.	$\int \sin x dx = -\cos x + c$	
5.	$\int \cos x dx = \sin x + c$	
6.	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{N}$
7.	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{N}$
8.	$\int \sinh x dx = \cosh x + c$	
9.	$\int \cosh x dx = \sinh x + c$	
10.	$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \operatorname{tgh} x + c$	
11.	$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\operatorname{ctgh} x + c$	
12.	$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$	$a > 0$
13.	$\int e^x dx = e^x + c$	
14.	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$x \neq 0$
15.	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{N}$
16.	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg}\ x + c$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{N}$
17.	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c$	$a \neq 0$
18.	$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$	$a \neq 0$
19.	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+a}\right\rvert + c$	$a \in \mathbb{R}$
20.	$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + c$	$a > 0,\ \lvert x\rvert \neq a$
21.	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c$	
22.	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln\lvert ax+b\rvert + c$	
23.	$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$	$n \geq 2$
24.	$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$	$n \geq 2$
25.	$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2} \ln\lvert x + \sqrt{x^2+a}\rvert + c$	
26.	$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx$	$n \geq 2$
27.	$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{\lvert a\rvert} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c$	

Wzór na całkowanie przez części: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$.
Całkowanie pewnych całek niewymiernych:

2a. Całkę postaci $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ sprowadzamy do $\int \frac{dx}{\sqrt{a(x-p)^2+q}}$ i dokonujemy podstawienia $x - p = \sqrt{\frac{1}{|a|}}t$.

2b. Całkę postaci $\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$ sprowadzamy do $\int \sqrt{a(x-p)^2+q}dx$ i dokonujemy podstawienia $x - p = \sqrt{\frac{1}{|a|}}t$, a następnie stosujemy wzory ze strony 1

Całkowanie pewnych wyrażeń trygonometrycznych:

1. Całkę $\int W(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x)dx$ obliczmy przez podstawienie $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Wówczas mamy:
$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$
2. Całkę $\int W(\sin^2 x, \cos^2 x \sin x \cos x)dx$ obliczmy przez podstawienie $t = \operatorname{tg} x$. Wówczas mamy:
$$dx = \frac{1}{1+t^2}dt, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$
3. Całkę postaci $\int \sin^m x \cos^n x dx,\ n, m \in \mathbb{N}$ liczmy:
a) gdy $m,\ n$ są parzyste jak podpunkcie 2;
b) gdy m jest nieparzyste, przez podstawienie $t = \cos x$,
c) gdy n jest nieparzyste, przez podstawienie $t = \sin x$.
4. Całki postaci $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \cos bx$ obliczmy korzystając ze wzorów:
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)],$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)],$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)].$$

Całka oznaczona

Pole obszaru płaskiego:
Jeżeli krzywe $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$ dla $x \in [a, b]$ spełniają nierówność $f(x) \geq g(x)$ co oznacza, że wykres funkcji f znajduje się powyżej wykresu funkcji g, to pole obszaru ograniczonego tymi krzywymi oraz prostymi $x = a$, $x = b$ wyraża się wzorem:
$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Długość krzywej:
Długość krzywej $\Gamma : y = f(x)$ dla $x \in [a, b]$ wyraża się wzorem: $|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$.

Objętość brył obrotowych:
Objętość V bryły powstałej z:

a) obrotu wokół osi Ox obszaru $\mathcal{N}:\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)$ wyraża się wzorem: $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$,

b) obrotu wokół osi Oy obszaru $\mathcal{N}:\ 0 \leq a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)$ (innymi słowy objętość bryły powstałej z obrotu obszaru "pod krzywą"$y = f(x)$) wyraża się wzorem: $V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$.

Pole powierzchni brył obrotowych:
Pole powierzchni powstałej z obrotu:

a) wokół osi Ox wykresu funkcji $f(x)$ dla $a \leq x \leq b$, wyraża się wzorem: $P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$,

b) wokół osi Oy wykresu funkcji $f(x)$ dla $0 \leq a \leq x \leq b$, wyraża się wzorem: $P = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$.

Funkcje wielu zmiennych

Równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)-\big(z-z_0\big)=0.$

Gradient: $\mathbf{grad} f(x_0,y_0)\stackrel{def}{=}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right].$

Pochodna kierunkowa: $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)=\mathbf{grad} f(x_0,y_0)\circ\vec{v}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)v_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)v_2.$

lub $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cos\beta=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\sin\alpha,$

gdzie $\vec{v}$ jest jednostkowy.

Wzór na przybliżone wartości: $f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$

Całki wielokrotne

Przejście w całce podwójnej do współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi \end{cases}\qquad \text{gdzie } (r,\varphi)\in\Delta:$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_\Delta f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\,drd\varphi.$$

Przejście w całce potrójnej do współrzędnych sferycznych

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi\cos\omega, \\ y=r\sin\varphi\cos\omega, \\ z=r\sin\omega \end{cases}\qquad \text{gdzie } (r,\varphi,\omega)\in\Delta:$$

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_\Delta f(r\cos\varphi\cos\omega,r\sin\varphi\cos\omega,r\sin\omega)r^2\cos\omega\,drd\varphi d\omega.$$

Przejście w całce potrójnej do współrzędnych walcowych

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi, \\ z=h \end{cases}\qquad \text{gdzie } (r,\varphi,h)\in\Delta:$$

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_\Delta f(r\cos\varphi,r\sin\varphi,h)r\,drd\varphi dh.$$

Wzory na: Objętość $V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, pole $P=\iint\limits_D dxdy$, objętość $V=\iiint\limits_G dxdydz.$

Trygonometria:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

φ	I ćw.	II ćw.	III ćw.	IV ćw.
$\sin\varphi$	+	+	−	−
$\cos\varphi$	+	−	−	+
$\operatorname{tg}\varphi$	+	−	+	−
$\operatorname{ctg}\varphi$	+	−	+	−

φ	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\varphi$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\varphi$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\cos\varphi$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Inne przydatne wzory i nierówności:

a) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$

b) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$

c) $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos^2\alpha}{2},$

d) $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos^2\alpha}{2},$

e) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$

f) $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$

g) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$

h) $\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$

i) $a^2-b^2=(a-b)(a+b),$

j) $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2),$

k) $\ln x<x-1$ dla każdego $x>0,$

l) $\ln(x+1)<x$ dla każdego $x>-1,$

m) $\sin x\le x$ dla każdego $x>0,$

n) $\sin x\ge\frac{2}{\pi}x$ dla każdego $x\in[0,\frac{\pi}{2}],$

o) $\operatorname{tg}x>x$ dla każdego $x\in(0,\frac{\pi}{2}),$

p) $\operatorname{tg}x\le\frac{4}{\pi}x$ dla każdego $x\in[0,\frac{\pi}{4}],$

q) $|\sin x|\le|x|$ dla każdego $x\in\mathbb{R}.$