Granice i ciągłość dla funkcji jednej zmiennej

Definicja 1. (Heinego granicy właściwej funkcji w punkcie)
Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0)$ punktu x_0. Liczbę g nazywamy granica właściwą funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\{x_n\} \subset S(x_0)} \left[\left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \right) \right].$$

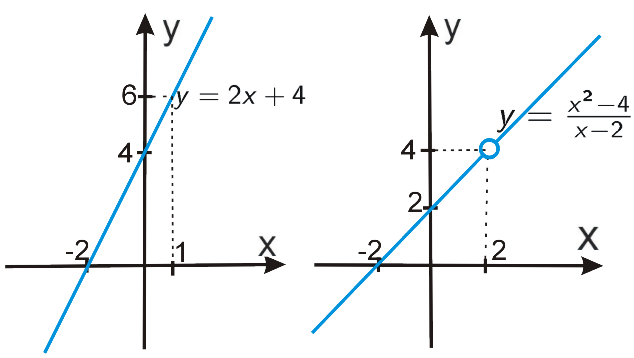
Przykład 1. Stosując definicję Heinego granicy właściwej funkcji uzasadnij, że:
a) $\lim\limits_{x\to 1} 2x + 4 = 6$, b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.

Rozwiązanie: a) Niech ciąg $x_n \subset S(1)$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 2x_n + 4 = 6.$$

b) Niech ciąg $x_n \subset S(2)$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 4}{x_n - 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n-2)(x_n+2)}{x_n - 2} = \lim_{n\to\infty} x_n + 2 = 4.$$



Rysunek 1: Ilustracja do przykładu

Definicja 2. (Granica lewostronna właściwa funkcji w punkcie według Heinego)
Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na lewostronnym sąsiedztwie punktu x_0. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę lewostronną $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g$$

gdy dla dowolnego zbieżnego do x_0 ciągu (x_n) punktów lewostronnego sąsiedztwa punktu x_0, ciąg wartości $(f(x_n))$ zbiega do g.

Definicja 3. (Granica prawostronna właściwa funkcji w punkcie według Heinego)
Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na prawostronnym sąsiedztwie punktu x_0. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę prawostronną $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy

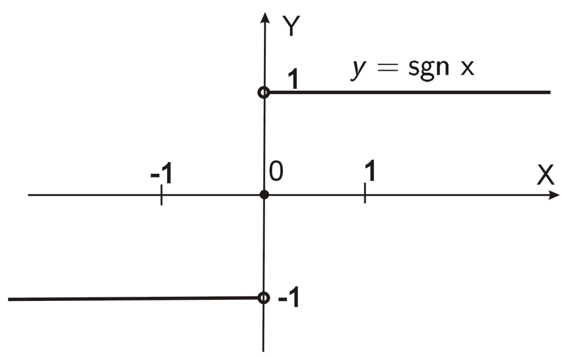
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g$$

gdy dla dowolnego zbieżnego do x_0 ciągu (x_n) punktów prawostronnego sąsiedztwa punktu x_0, ciąg wartości $(f(x_n))$ zbiega do g.

Twierdzenie 1. *Jeśli funkcja $f(x)$ posiada w punkcie x_0 granicę, to tylko jedną.*

Graficznie: liczba g jest granicą prawostronną (lewostronną) funkcji w punkcie x_0, gdy wartości funkcji dla argumentów x dążących do x_0 przez wartości większe (mniejsze) od x_0, dążą do liczby g.

Przykład 2. Rozważmy funkcję $f(x) = \operatorname{sgn} x$:



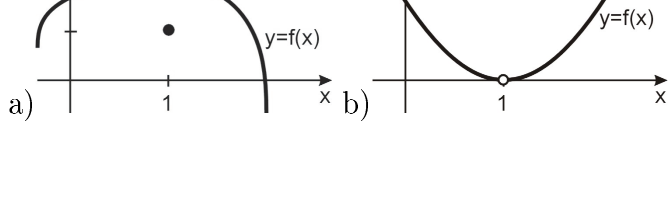
Granica lewostronna funkcji $f(x) = \operatorname{sgn} x$ w punkcie $x_0 = 0$ wynosi: $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$, a granica prawostronna jest równa $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$.

Twierdzenie 2. *(warunek konieczny i wystarczający istnienia granicy w punkcie)*
Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby funkcja miała w badanym punkcie x_0 granicę jest istnienie i równość jej granic jednostronnych:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

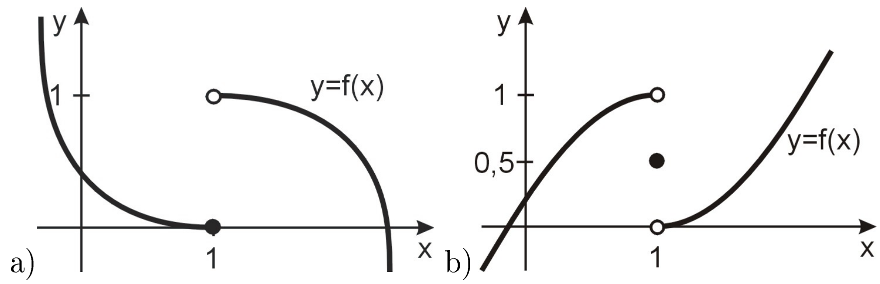
Ponadto wspólna wartość tych granic jest granicą funkcji w punkcie x_0.

Przykład 3. Korzystając z warunku koniecznego i dostatecznego istnienia granicy funkcji w punkcie zbadaj istnienie granicy funkcji w punkcie $x_0 = 1$:



Rozwiązanie: a) Ponieważ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, więc granica funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0 = 1$ istnieje i jest równa 1: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$;
b) Ponieważ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, więc granica funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0 = 1$ istnieje i jest równa 0: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$, pomimo tego, że funkcja nie jest określona dla $x_0 = 1$.

Przykład 4. Korzystając z warunku koniecznego i dostatecznego istnienia granicy funkcji w punkcie zbadaj istnienie granicy funkcji w punkcie $x_0 = 1$:



Rozwiązanie: a) Ponieważ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$, natomiast $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$, więc granica funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0 = 1$ nie istnieje.

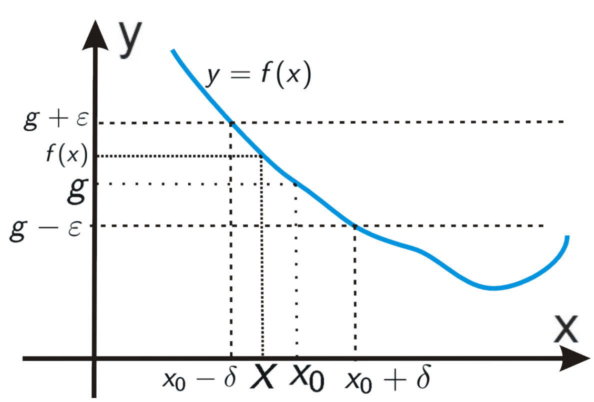
b) Ponieważ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$, natomiast $= \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$, więc granica funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0 = 1$ nie istnieje.

Definicja 4. (Cauchy'ego granicy właściwej funkcji w punkcie)
Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie punktu x_0. Liczbę g nazywamy granicą właściwą funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in S(x_0)} \left[\left(|x - x_0| < \delta \right) \Rightarrow \left(|f(x) - g| < \varepsilon \right) \right].$$



Rysunek 2: Interpretacja geometryczna granicy właściwej funkcji w punkcie x_0

Oznacza ona, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą g, gdy jej wartości różnią się od g dowolnie mało dla argumentów leżących blisko punktu x_0.

Twierdzenie 3. *(o arytmetyce granic funkcji w punkcie)*
Niech funkcje f i g mają granice właściwe (skończone) w punkcie x_0. Wtedy:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\Big(f(x)\pm g(x)\Big)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$ *o ile* $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$;
- *jeśli* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=y_0$, *ponadto funkcja* $g(y)$ *jest ciągła w punkcie* y_0 *oraz* $g(y_0)=\alpha$, *to* $\lim\limits_{x\to x_0}g(f(x))=\alpha$,

o ile działania po prawej stronie są wykonalne (oznaczone).

Uwaga 1. Twierdzenie to stosujemy również do granic w $\pm\infty$ oraz do granic jednostronnych.

Twierdzenie 4. *(o dwóch granicach lub o dwóch funkcjach)*
Niech $a,b\in\mathbb{R}$ oraz będą dane dwie funkcje $f,g:D\to\mathbb{R}$ o wspólnej dziedzinie $D\subseteq\mathbb{R}$, spełniające nierówność $f(x)\leq g(x)$ dla każdego $x\in D$, to jeżeli:

a) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ *oraz* $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$ *to* $a\leq b$;

b) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ *to* $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$;

c) $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-\infty$ *to* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.

Twierdzenie 5. *(o trzech funkcjach)*
Niech mamy trzy funkcje f, g, $h:D\to\mathbb{R}$ o wspólnej dziedzinie $D\subseteq\mathbb{R}$, spełniają nierówności $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ dla każdego $x\in D$ oraz niech $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=g$. Wówczas

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=g.$$

Uwaga 2. Twierdzenia o dwóch i o trzech funkcjach zachodzą również dla granic właściwych jednostronnych jak również dla granic właściwych w nieskończoności.

Przykład 5. Na podstawie twierdzenia o trzech funkcjach wykaż, że

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

Rozwiązanie: Ponieważ dla $x>0$ (a tym bardziej i dla $x\to+\infty$) zachodzi:

$$\underbrace{\frac{-1}{x}}_{\underset{f}{\shortparallel}}\leq\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\underset{g}{\shortparallel}}\leq\underbrace{\frac{1}{x}}_{\underset{h}{\shortparallel}}$$

oraz $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$ i $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, więc z twierdzeni o trzech funkcjach mamy, że:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

Warto znać:

1)Niech $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ oraz $Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m$ będą dwoma wielomianami. Wówczas

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}\right)} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & \text{dla } \; n = m \\ 0 & \text{dla } \; n < m \\ +\infty & \text{dla } \; n > m \; \text{ oraz } \; \frac{a_0}{b_0} > 0 \\ -\infty & \text{dla } \; n > m; \; \text{ oraz } \; \frac{a_0}{b_0} < 0 \end{cases}$$

Kilka prostych przykładów:

Przykład 6. Oblicz następujące granice a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^5-4x^3+2x-5}{3x^5+2x-1}$, b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-4x^3+2x-5}{2x^4-3}$, c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^5+2x^2-5x}{2x^2+x-1}$.

Rozwiązanie:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5-4x^3+2x-5}{3x^5+2x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5(1-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^4}-\frac{5}{x^5})}{x^5(3+\frac{2}{x^4}-\frac{1}{x^5})} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^4}-\frac{5}{x^5}}{3+\frac{2}{x^4}-\frac{1}{x^5}} = \frac{1}{3}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-4x^3+2x-5}{2x^4-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4(\frac{-4}{x}+\frac{2}{x^3}-\frac{5}{x^4})}{x^4(2-\frac{3}{x^4})} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{-4}{x}+\frac{2}{x^3}-\frac{5}{x^4}}{2-\frac{3}{x^4}} = 0$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^5+2x^2-5x}{2x^2+x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2(x^3+2-\frac{5}{x})}{x^2(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})} = -\infty$.

Przykład 7. Badając granice jednostronne rozstrzygnąć istnienie granicy funkcji:

a) $f(x) = \frac{|x-2|x}{x-2}$ w punkcie $x = 2$;

b) $g(x) = \begin{cases} \cos x + 2 & \text{dla } x < 0 \\ x^2 + 3 & \text{dla } x > 0, \end{cases}$ w punkcie $x_0 = 0$;

c) $h(x) = \frac{x^2+2x-3}{|x+3|}$ w punkcie $x_0 = -3$.

Rozwiązanie:

a) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} \frac{|x-2|x}{x-2}\{\frac{0}{0}\} = \lim\limits_{x\to2^-} \frac{-(x-2)x}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^-} -x = -2$;

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} \frac{|x-2|x}{x-2} = \{\frac{0}{0}\} = \lim\limits_{x\to2^+} \frac{(x-2)x}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+} x = 2$.

Zatem ponieważ $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ granica $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ nie istnieje.

b) $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to0^-} (\cos x + 2) = 1 + 2 = 3$;

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+} (x^2 + 3) = 0 + 3 = 3$;

Tutaj zachodzi równość granic jednostronnych: $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to0^+} g(x)$, więc granica $\lim\limits_{x\to2} g(x)$ istnieje i jest równa 3.

c) $\lim\limits_{x\to-3^-} h(x) = \lim\limits_{x\to-3^-} \frac{x^2+2x-3}{|x+3|}\{\frac{0}{0}\} = \lim\limits_{x\to-3^-} \frac{(x+3)(x-1)}{-(x+3)} = \lim\limits_{x\to-3^-} -(x-1) = 4$;

$\lim\limits_{x\to-3^+} h(x) = \lim\limits_{x\to-3^+} \frac{x^2+2x-3}{|x+3|} = \{\frac{0}{0}\} = \lim\limits_{x\to-3^+} \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)} = \lim\limits_{x\to-3^+} (x-1) = -4$.

Zatem ponieważ $\lim\limits_{x\to-3^-} h(x) \neq \lim\limits_{x\to-3^+} h(x)$ granica $\lim\limits_{x\to-3} h(x)$ nie istnieje.

Definicja 5. (Warunek Heinego na ciągłość funkcji w punkcie)
Funkcję $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ nazywamy ciągłą w punkcie $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x_n:\mathbb{N}\to D} \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Definicja 6. (Warunek Cauchy'ego na ciągłość funkcji w punkcie)
Funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ określoną na otoczeniu $O(x_0)$ punktu x_0 nazywamy ciągłą w tym punkcie, jeżeli:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in O(x_0)} \Big(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\Big).$$

Twierdzenie 6. *(*warunek konieczny i wystarczający ciągłości funkcji w punkcie*)*
Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

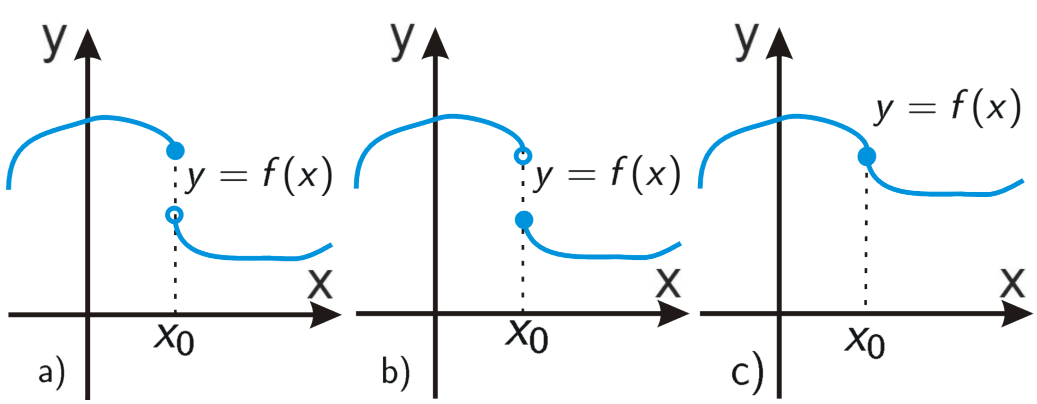
Definicja 7. (lewostronna ciągłość funkcji w punkcie x_0)
Funkcję określoną przynajmniej na lewostronnym otoczeniu punktu x_0 $O^-(x_0)$ (a tym samym i w punkcie x_0) nazywamy lewostronnie ciągłą w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Definicja 8. (prawostronna ciągłość funkcji w punkcie x_0)
Funkcję określoną przynajmniej na prawostronnym otoczeniu punktu x_0 $O^+(x_0)$ (a tym samym i w punkcie x_0) nazywamy prawostronnie ciągłą w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Przykład 8. .



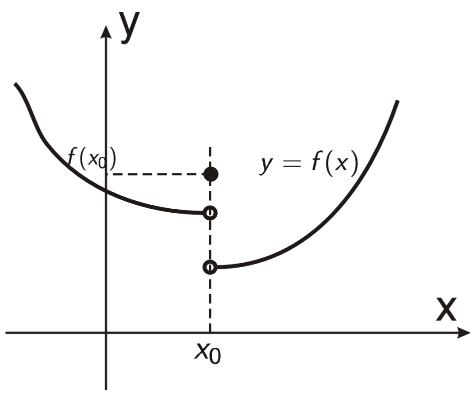
Rysunek 3: a)funkcja lewostronnie ciągła w punkcie x_0 b)funkcja prawostronnie ciągła w punkcie x_0 c) funkcja ciągła w punkcie x_0

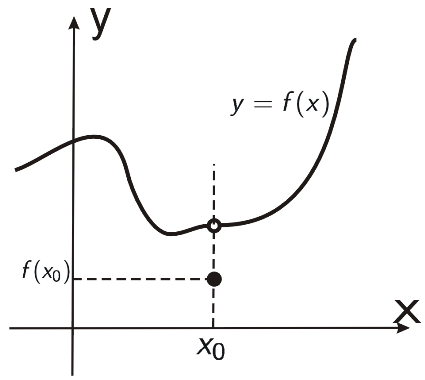
Rodzaje nieciągłości funkcji

Definicja 9. (nieciągłość I rodzaju:)
Funkcja f posiada w punkcie x_0 nieciągłość pierwszego rodzaju typu:

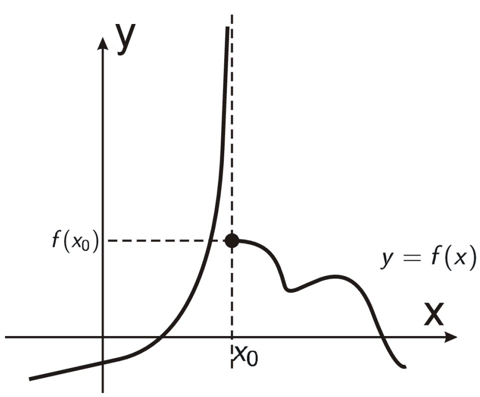
a) skok, gdy: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$,

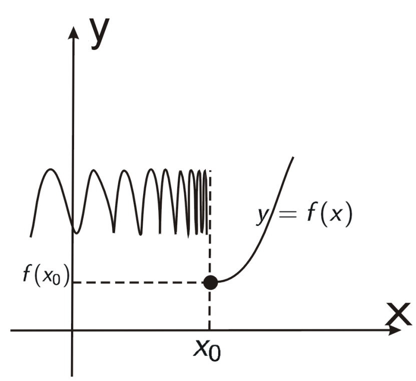
b) luka, gdy: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$.





Definicja 10. (nieciągłość II rodzaju)
Funkcja f posiada w punkcie x_0 nieciągłość drugiego rodzaju, gdy co najmniej jedna z granic $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ nie istnieje lub jest niewłaściwa.





Przykład 9. Wyznacz punkty nieciągłości funkcji i określ ich rodzaje:

a) $f(x) = [x]$- nieciągłość pierwszego rodzaju typu skok dla $x \in \mathbb{Z}$

b) $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$- nieciągłość pierwszego rodzaju typu luka w punkcie $x_0 = 0$.

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{dla} \quad x \neq 2 \\ 3 & \text{dla} \quad x = 2 \end{cases}$ -nieciągłość drugiego rodzaju w punkcie $x_0 = 2$.

Przykład 10. Zbadać ciągłość funkcji, w punktach nieciągłości określ rodzaj i typ nieciągłości:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-x-6|}{|x+2|} & \text{dla} \quad x \neq -2 \\ 3 & \text{dla} \quad x \neq -2 \end{cases}$ w punkcie $x_0 = -2$;

b) $g(x) = \begin{cases} 2\cos(x-2)+x & \text{dla } x \leq 2 \\ x^2 & \text{dla } x > 2, \end{cases}$ w punkcie $x_0 = 2$.

Rozwiązanie: liczymy granice jednostronne i wartość funkcji w rozważanym punkcie

a) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^-} \frac{|x^2-x-6|}{|x+2|} = \lim\limits_{x\to-2^-} \frac{(x-3)(x+2)}{-(x+2)} = \lim\limits_{x\to-2^-} -(x-3) = 5;$

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^+} \frac{|x^2-x-6|}{|x+2|} = \lim\limits_{x\to-2^+} \frac{-(x-3)(x+2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2^+} -(x-3) = 5.$

Pomimo tego, że granice jednostronne są równe funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = -2$, gdyż $f(-2) = 3 \neq 5$. W punkcie $x_0 = -2$ mamy nieciągłość I rodzaju, typu luka. Jest to nieciągłość usuwalana.

b) $\lim\limits_{x\to2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to2^-} 2\cos(x-2)+x = 2\cos 0 + 2 = 4;$

$\lim\limits_{x\to2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to2^+} x^2 = 2^2 = 4.$

Tutaj granice jednostronne są równe 4 oraz $f(2) = 4$. Zatem funkcja $g(x)$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$.

Uwaga 3. Mówimy, że funkcja jest ciągła na przedziale:

- otwartym (a, b), jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.
- domkniętym $[a, b]$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie przedziału otwartego (a, b) oraz prawostronnie ciągła w punkcie a i lewostronnie ciągła w punkcie b.

Definicja 11. (funkcje elementarne)
Podstawowymi funkcjami elementarnymi nazywamy funkcje: stałe, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne oraz cyklometryczne.
Funkcje elementarne, to takie które można otrzymać z podstawowych funkcji elementarnych za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych oraz operacji składania funkcji.

Twierdzenie 7. *Każda funkcja elementarna jest ciągła na każdym przedziale zawartym w swojej dziedzinie*

Twierdzenie 8. *(działania arytmetyczne na funkcjach ciągłych)*
Jeżeli dwie funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są ciągłe w punkcie $x_0 \in D$, to w tym punkcie również są ciągłe funkcje

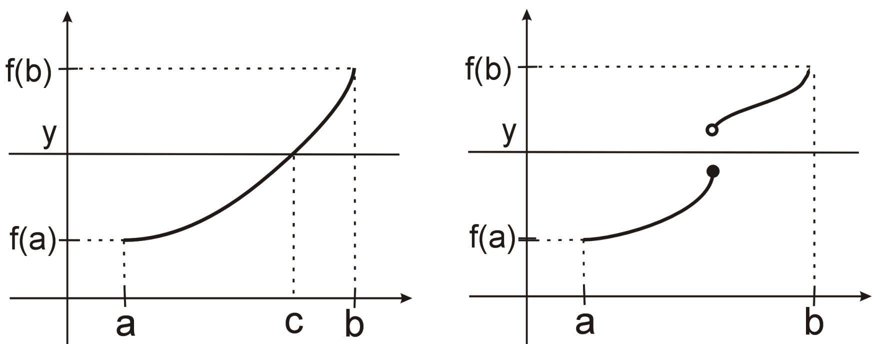
- $f(x) \pm g(x)$,
- $f(x) \cdot g(x)$,
- $\frac{f(x)}{g(x)}$ *o ile* $g(x) \neq 0$.

Twierdzenie 9. *(o ciągłości funkcji złożonej)*
Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0 i funkcja $g(x)$ jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$, to złożenie $g \circ f$ jest funkcją ciągłą w punkcie x_0.

Twierdzenie 10. *(o ciągłości funkcji odwrotnej)*
Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją odwracalną (rosnącą lub malejącą oraz 'na') i ciągłą. Wówczas funkcja odwrotna $f^{-1} : Y \to X$ jest także ciągła.

Twierdzenie 11. *(własność Darboux)*
Niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą i określona na dowolnym przedziale liczb rzeczywistych. Jeżeli w dwóch punktach $x = a$ i $x = b$, (gdzie $a < b$) tego przedziału funkcja przyjmuje różne wartości $f(a) = A$ oraz $f(b) = B$, to dla dowolnej liczby y takiej, że $y \in (A; B)$ istnieje taki punkt $x = c$; $c \in (a, b)$ f(c)=y.

Mówiąc inaczej: funkcja ciągła określona na dowolnym przedziale liczb rzeczywistych przyjmuje każdą wartość pośrednią pomiędzy dwoma swymi wartościami.



Rysunek 4: Ilustracja geometryczna do twierdzenia Darboux

Uwaga 4. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest funkcja ciągła na przedziale domkniętym $[a; b]$ i taka, że $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje $c \in (a; b)$ takie, że $f(c) = 0$.

Granice podstawowych wyrażeń nieoznaczonych:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,\ \alpha > 0$ *c)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a,\ a > 0$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e,\ 0 < a \neq 1$ *e)* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a,\ a \in \mathbb{R}$ *f)* $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

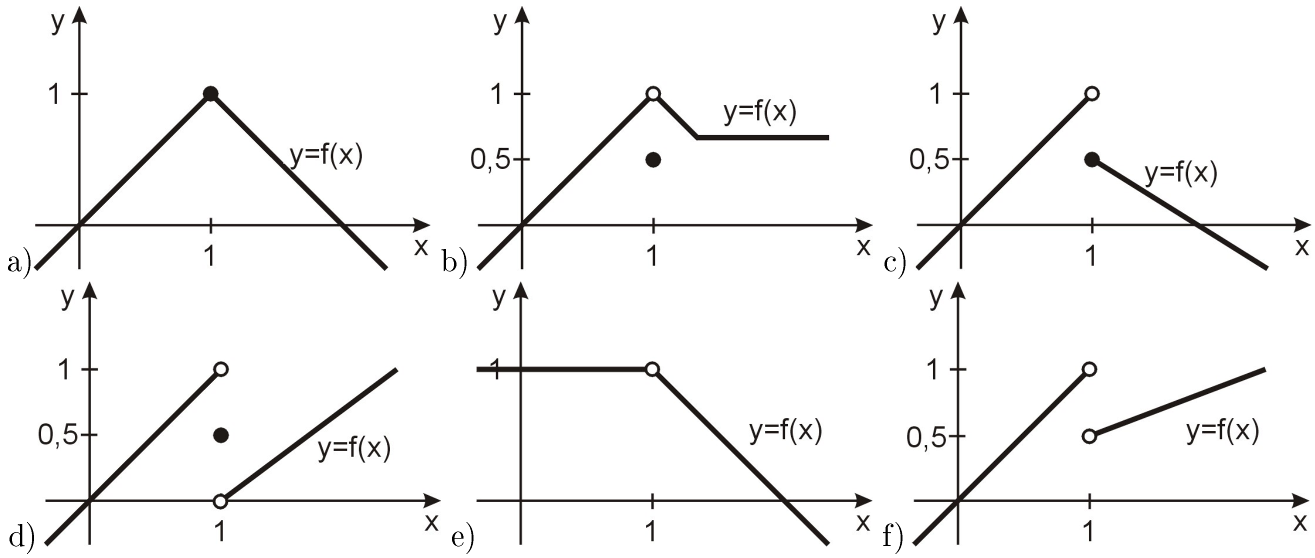
g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = a, \quad a \in \mathbb{R}$ *h)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ *i)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

Inne przydatne wzory:

a) $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha,$ b) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$
c) $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{2},$ d) $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos^2\alpha}{2},$
e) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$ f) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$
g) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$ h) $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
i) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$ j) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$

Zadania

1. Dla funkcji, których wykresy przedstawiono na rysunkach, podaj granice oraz granice jednostronne w punkcie $x_0 = 1$ lub uzasadnij, że granice ta nie istnieją:



2. W oparciu o definicję Heine'go granic funkcji wykazać, że:
(a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$ (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4x+1}{3x+2} = \frac{4}{3}$ (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4-x^2}{x+2} = -\infty$

3. Wykazać na podstawie definicji Heine'go, że nie istnieją granice funkcji:
(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 2} 2^{\frac{1}{x-2}}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$, (d) $\lim\limits_{x\to \infty} \sin\sqrt{x}$, (e) $\lim\limits_{x\to 0} 4^{\frac{1}{x}}$.

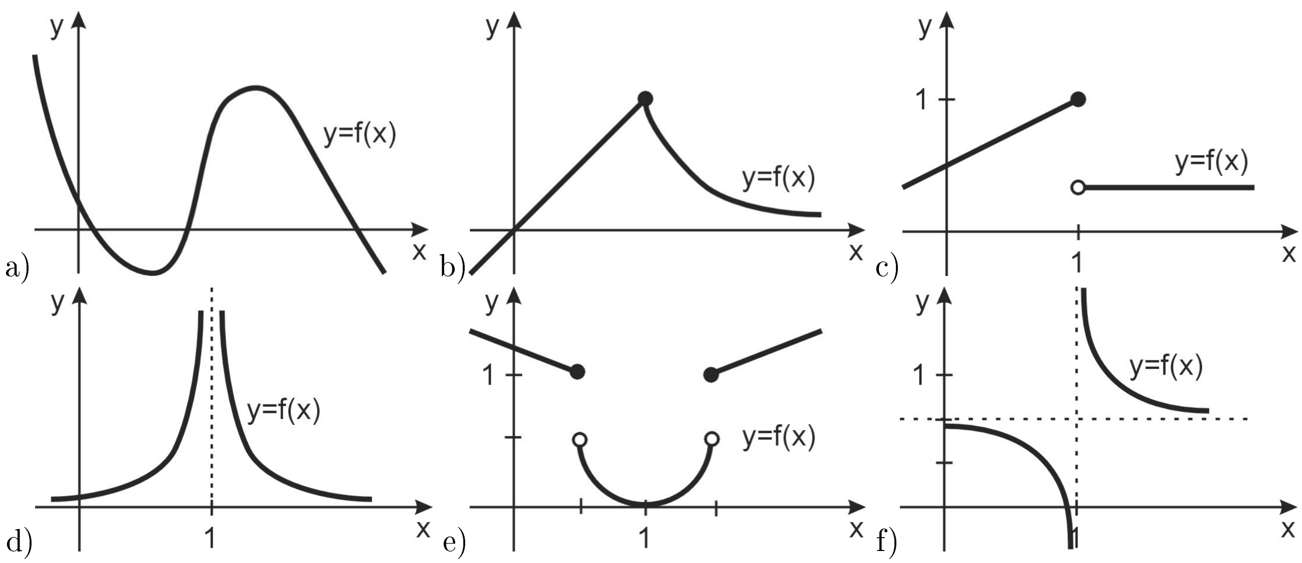
4. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic, obliczyć podane granice funkcji (o ile istnieją):
(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-5}{3x-4}$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x+1}{x^2-x+1}$ (c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^{21}-8x^4+3}{x^{17}-4x^8+4x-1}$
(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{x}+3}{5x\sqrt{x}+x}$ (e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{1-6\sqrt[3]{x}}$ (f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$
(g) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$ (h) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-4x-5}{x^2-5x}$ (i) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$
(j) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3+x^2-12x}{x^3-7x-6}$ (k) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+\sqrt{x^2+4x+3})$ (l) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{4x^2+1})$
(m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$ (n) $\lim\limits_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ (o) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-3}-1}$
(p) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{3x}$ (q) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$ (r) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$
(s) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{1-\cos 4x}$ (t) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$ (u) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi-4x}$
(v) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi}$ (w) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x-\sin 5x}{\sin x}$ (x) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+5}{2x-1}\right)^{x^2+1}$
(y) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{2+3x^2}{2x+3x^2}\right)^{4x}$ (z) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+5x)^{\frac{2}{x}}$ (a) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{3x}$
(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \log_7\left(\frac{3x^2-4}{7-x}\right)$ (c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin\left(\frac{-3x^2}{x^3+1}\right)$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-1}{\sin x}$
(e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\operatorname{tg} 7x}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x)}{e^x-1}$ (g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x}{\arcsin 3x}$
(h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x-2^x}{x}$ (i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin 5x}$.

5. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach wykazać:
(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+\sin x}{x^2-\cos x} = 1$ (b) $\lim\limits_{x\to 3} (x-3)\cos\frac{1}{x-3} = 0$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3[x]}{2x-5} = \frac{3}{2}$.

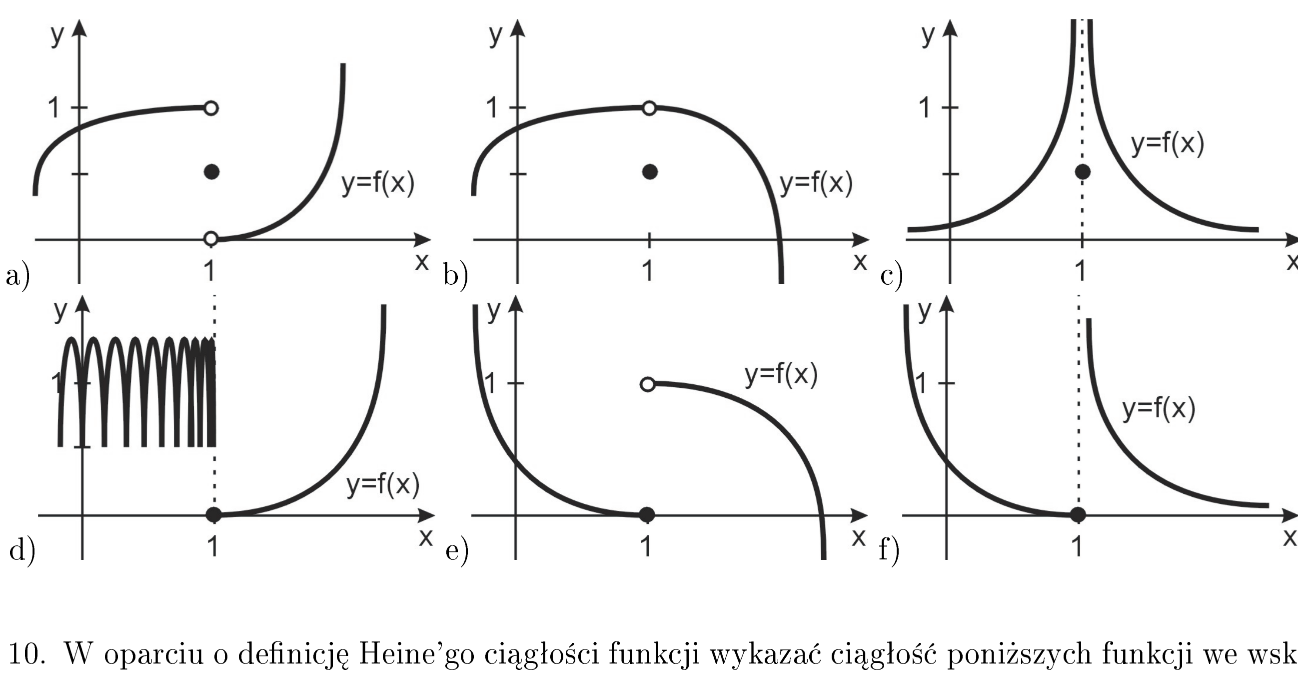
6. Korzystając z twierdzenia o dwóch funkcjach wykazać:
   (a) $\lim_{x\to+\infty} -x^2 + 2\cos x = -\infty$ (b) $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{2x-\sin x} = +\infty.$

7. Zbadać, obliczając granice jednostronne, czy istnieją podane granice:
   (a) $\lim_{x\to1} \frac{x+1}{x-1}$ (b) $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{|x|}$ (c) $\lim_{x\to1} \frac{|x-1|^3}{x^3-x^2}$ (d) $\lim_{x\to3}[x]$ (e) $\lim_{x\to1} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ (f) $\lim_{x\to3} \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x-3}}$

8. Wskaż punkty, w których funkcje o podanych wykresach nie są ciągłe:



9. Określ rodzaje nieciągłości funkcji o podanych wykresach w punkcie $x_0 = 1$:



10. W oparciu o definicję Heine'go ciągłości funkcji wykazać ciągłość poniższych funkcji we wskazanych punktach:
    a) $f(x) = 1 - 2x + 3x^2;\ x_0 = 1,$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2; & \text{dla } x \le 3 \\ 3x; & \text{dla } x > 3 \end{cases}$ $x_0 = 3.$

11. Zbadaj ciągłość funkcji w jej dziedzinie. W przypadku, gdy funkcja nie jest ciągła określ rodzaj nieciągłości w punktach nieciągłości:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{dla} \quad x > 0 \\ 3^x & \text{dla} \quad x \leq 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & \text{dla} \quad 0 < x \leq 1 \\ \log x & \text{dla} \quad 1 < x < 2 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x}{|x-3|} & \text{dla} \quad x \neq 3 \\ 3 & \text{dla} \quad x = 3 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}; & \text{dla } x \neq 0 \\ 0; & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x^2-1}; & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ 1; & \text{dla } x \in \{-1, 1\} \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}; & \text{dla } -1 < x < 0 \\ 0; & \text{dla } x = 0 \\ \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}; & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}; & \text{dla } x \neq 0 \\ 1; & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

12. Dobrać parametry a, b tak, aby podane funkcje były ciągłe na całej swojej dziedzinie:

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+3}{x-3} & \text{dla} \quad x \neq 3 \\ a & \text{dla} \quad x = 3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla} \quad x < 1 \\ \log_a x & \text{dla} \quad 1 \leq x \leq 4 \\ \frac{\pi}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x-4}} & \text{dla} \quad x > 4 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{dla} \quad x \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin x + b & \text{dla} \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{dla} \quad x \in [0; 2) \\ ax - 2 & \text{dla} \quad x \in [2; 10) \\ (x-8)^2 + x + b & \text{dla} \quad x \in [10; 20) \end{cases}$

13. Wykazać, że dla dowolnych licz rzeczywistych $a > b > c$ funkcja

$$f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$$

ma co najmniej dwa pierwiastki.

14. Uzasadnić, że funkcja $f(x) = 2^x - x^2$ przyjmuje wartość $w = \frac{1}{10}$ na przedziale $D = [1, 3]$.

15. Pokazać, że równanie $3 \sin^2 x - 2 \cos^3 x = 0$ posiada przynajmniej jedno miejsce zerowe w przedziale $D = [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}]$.