Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej

Zadania:

1. Sprawdź, czy funkcja $F(x) = (x^2 + 5x + 1)\cos x$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = (2x+5)\cos x - (x^2+5x+1)\sin x - 2013$ w zbiorze $P = [-2019; 2019]$.

2. Sprawdź, czy funkcja $F(x) = x \ln \frac{1}{x^2} - 10$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = \ln \frac{1}{x^2} - 2$ w zbiorze $P = [1, +\infty)$.

3. Wyznaczyć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = x^2 - 3$, do której wykresu należy punkt $(1; 3)$.

4. Wyznaczyć zbiór, w którym wykres dowolnej funkcji pierwotnej funkcji $f(x) = 4x^2 - x$ jest wypukły.

5. Korzystając z podstawowych wzorów na całki funkcji elementarnych oblicz podane całki nieoznaczone:
   (a) $\int x^2 dx$; (b) $\int (x^2\sqrt{x} + x^3 + 4x - 1)dx$; (c) $\int (5x - 6x^2 + \frac{1}{x} + \cos x + e^x)dx$;
   (d) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}}$; (e) $\int 3^x dx$; (f) $\int 2^x \cdot 5^{1-x} dx$;
   (g) $\int \frac{x^2 dx}{x^2+1}$; (h) $\int \frac{e^x dx}{3e^x - 2}$; (i) $\int \mathrm{tg}^2\, x dx$;
   (j) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$; (k) $\int \frac{4}{x^2+1} dx$; (l) $\int \frac{x\sqrt{x} - x\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$;
   (m) $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[5]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}} dx$; (n) $\int \frac{(x^2-1)^3}{x} dx$; (o) $\int \left(\frac{5}{3x} - \frac{4}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\sqrt[5]{3}}{\cos^2 x}\right) dx$;
   (p) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$; (r) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$; (s) $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2}\right) dx$.

6. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez podstawianie oblicz:
   (a) $\int \frac{e^x}{e^x+2} dx$; (b) $\int x\sqrt{x^2-3} dx$; (c) $\int \frac{x}{3x^2-2} dx$;
   (d) $\int \frac{2x+1}{2x^2+2x+5} dx$; (e) $\int x e^{x^2} dx$; (f) $\int (5-3x)^{10} dx$;
   (g) $\int (7x+2)^4 dx$; (h) $\int \sin^3 x dx$; (i) $\int \frac{\ln x}{x} dx$;
   (j) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{16-9x^4}}$; (k) $\int \frac{\sin x}{3+2\cos x} dx$; (l) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$;
   (m) $\int (x^2+x)\sin(x^3 + \frac{3}{2}x^2) dx$; (n) $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3+1)} dx$; (o) $\int \frac{dx}{(x^2+1)\arctan x} dx$;
   (p) $\int x^3 \ln(x^4+2) dx$; (r) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 1} dx$; (s) $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\cos^2 x} dx$;

7. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części oblicz:
   (a) $\int x \sin x dx$; (b) $\int x^2 e^{-x} dx$; (c) $\int x^2 \sin x dx$;
   (d) $\int (3x^2 + 4x - 1)\cos 4x dx$; (e) $\int \ln x dx$; (f) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^5}} dx$;
   (g) $\int x^4 \ln x dx$; (h) $\int x \ln^3 x$; (i) $\int x^3 \ln^2 x\, dx$;
   (j) $\int e^{4x} \cos 3x dx$ (k) $\int 3^x \cos x dx$; (l) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$;
   (m) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; (n) $\int \frac{x \ln(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2}} dx$; (o) $\int \frac{x^2 \sin x}{\cos^3 x} dx$;

8. Oblicz całki z funkcji wymiernych:
   (a) $\int \frac{2x}{x+1} dx$; (b) $\int \frac{x+2}{x^2-2x} dx$; (c) $\int \frac{1}{x(x+1)^2} dx$;
   (d) $\int \frac{x^2}{x^2+2x-3} dx$; (e) $\int \frac{3}{x^2+4x+7} dx$; (f) $\int \frac{x(x+2)}{x^2+2x+3} dx$;
   (g) $\int \frac{8x+2}{2x^2+4x+3} dx$; (h) $\int \frac{x^4 - x^3 + x^2 + 1}{x^3 + x} dx$; (i) $\int \frac{2x^2 + x - 4}{x^3 - x^2 - 2x} dx$;

9. Oblicz całki z funkcji trygonometrycznych:
   $(a)\ \int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx;$ $(b)\ \int \frac{1}{\cos x}dx;$ $(c)\ \int \frac{1}{3+\cos x}dx;$
   $(d)\ \int \cos^4 x dx;$ $(e)\ \int \sin^3 x dx;$ $(f)\ \int \frac{1}{4\sin^2 x+9\cos^2 x}dx;$
   $(g)\ \int \sin^3 x\cos^3 x dx;$ $(h)\ \int \sin^2 x\cos^4 x dx;$ $(i)\ \int \sin 3x\cos 5x dx;$
   $(j)\ \int \sin x\sin 3x dx;$ $(k)\ \int \sin^8 x dx;$ $(l)\ \int \cos^7 x dx;$

10. Oblicz całki z funkcji niewymiernych:
   $(a)\ \int \sqrt{-x^2-4x+5}dx;$ $(b)\ \int \sqrt{x^2-2x-1}dx;$ $(c)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+3}};$
   $(d)\ \int \frac{1}{\sqrt{2+3x-2x^2}}dx;$ $(e)\ \int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx;$ $(f)\ \int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx;$
   $(g)\ \int \frac{3+\sqrt[6]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[4]{2x+1}}dx;$ $(h)\ \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx;$

11. Oblicz podane całki oznaczone z wykorzystaniem wzoru Newtona-Leibniza
   $a)\ \int\limits_3^4 \frac{dx}{x^2+3x+2};$ $b)\ \int\limits_0^3 \frac{1}{x^2+9}dx;$ $c)\ \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx;$
   $d)\ \int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos x dx;$ $e)\ \int\limits_0^6 \frac{6x}{\sqrt[3]{(x^2+4)^5}}dx;$ $f)\ \int\limits_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx;$
   $g)\ \int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}dx,\ (t=2\sin x);$ $h)\ \int\limits_{1/e}^e \ln x dx;;$ $i)\ \int\limits_{-1}^0 xe^{-x}dx;$
   $j)\ \int\limits_0^2 |x-1|dx;$ $k)\ \int\limits_{-3}^5 E(x)dx;$ $l)\ \int\limits_{-2}^5 x\, sgn(-2x+4)dx;$

12. Korzystając z interpretacji całki oznaczonej oblicz pole obszaru D ograniczonego:
   a) $y=\ln x,\ x=e,\ \ y=0;$ b) $y=x^2,\ y=2x^2,\ y=8,\ x\geq 0;$
   c) $y=x^3-x^2-x,\ \ y=x;$ d) $y=x^2+5x,\ y=x+5,\ y=0;$
   e) $y^2=4+x,\ \ y^2+x=2;$ f) $y=x,\ y=\frac{1}{4}x,\ y=\frac{4}{x}.$

13. Oblicz długość łuku krzywej:
   a) $y=\sqrt{1-x^2}$ dla $0\leq x\leq \frac{1}{2};$ b) $y=\ln(\cos x)$ dla $0\leq x\leq \frac{\pi}{3};$
   c) $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ dla $0\leq x\leq 1;$ d) $y=(4-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ dla $1\leq x\leq 8.$

14. Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu figury $\mathcal{N}$ wokół osi OX, gdzie $\mathcal{N}$:
   a) $y=2x-x^2,\ \ y=0;$ b) $y=x^2,\ \ y=\sqrt{x}.$

15. Oblicz objętość:
   a) kuli o promieniu R; b) elipsoidy obrotowej.

16. Oblicz pole powierzchni powstałej z obrotu funkcji:
   a) $y=\ln x$ dla $1\leq x\leq\sqrt{3}$ wokół osi Oy; b) $y=6x$ dla $0\leq x\leq 1$ wokół osi Ox;

17. Oblicz średnią wartość funkcji $f(x)$ na wskazanym przedziale $[a,b]$:
   a) $f(x)=\sqrt{x},\ \ [a,b]=[0,100];$ b) $f(x)=\sin x,\ \ [a,b]=[0,\pi];$
   c) $f(x)=\frac{1}{1+x^2},\ \ [a,b]=[0,1];$ d) $f(x)=sgn\, x,\ \ [a,b]=[-2,4];$

18. Prędkość pewnej rakiety w czasie początkowych 8 sekund po starcie wynosi $\frac{7}{2}t\sqrt[3]{t}$[m/s], przez następne 12 sekund wynosi $2t+40$[m/s] w chwili t, a przez kolejne 10 sekund jest stała. Oblicz drogę pokonaną przez rakietę: a) przez początkowych 8 sekund, b) przez początkowych 20 sekund, c) przez początkowych 30 sekund, d) od upływu 15-ej do upływu 25-tej sekundy.

Informacje pomocnicze:

przydatne wzory:

Lp.	Wzór	Uwagi
1.	$\int dx = x + c$	
2.	$\int a dx = ax + c$	
3.	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
4.	$\int \sin x dx = -\cos x + c$	
5.	$\int \cos x dx = \sin x + c$	
6.	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{N}$
7.	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{N}$
8.	$\int \sinh x dx = \cosh x + c$	
9.	$\int \cosh x dx = \sinh x + c$	
10.	$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \operatorname{tgh} x + c$	
11.	$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\operatorname{ctgh} x + c$	
12.	$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$	$a > 0$
13.	$\int e^x dx = e^x + c$	
14.	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$x \neq 0$
15.	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{N}$
16.	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg}\ x + c$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{N}$
17.	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + c$	$a \neq 0$
18.	$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$	$a \neq 0$
19.	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+a}\right\rvert + c$	$a \in \mathbb{R}$
20.	$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + c$	$a > 0,\ \lvert x\rvert \neq a$
21.	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c$	
22.	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$	
23.	$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx$	$n \geq 2$
24.	$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$	$n \geq 2$
25.	$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\lvert x + \sqrt{x^2+a}\rvert + c$	
26.	$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx$	$n \geq 2$
27.	$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c$	

Twierdzenie 1. *(Podstawowe prawa rachunku całkowego)*
Niech funkcje f i g będą ciągłe na przedziale $[a, b]$ oraz $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wówczas:

- $\int kf(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$, *gdzie $a = const. \in \mathbb{R}$,*
- $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Twierdzenie 2. *(całkowanie przez podstawienie)*
Niech funkcja f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz funkcja g ma ciągłą pochodną (tzn. funkcja $g'(x)$ jest ciągła). Wówczas zachodzi poniższy wzór na całkowanie przez podstawienie:

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x)dx = \int f(t)dt, \tag{1}$$

gdzie $t = g(x)$ oraz $dt = g'(x)dx$.

Twierdzenie 3. *(całkowanie przez części)*
Niech funkcje f i g mają ciągłe pochodne. Wówczas ma miejsce tzw. wzór na całkowanie przez części:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx. \tag{2}$$

Inne metody całkowania

a) Całkowanie funkcji wymiernych

Całki ułamków prostych pierwszego rodzaju obliczmy albo ze wzoru 22 (tabela całek), albo poprzez podstawienie. Całki ułamków prostych drugiego rodzaju wyliczmy jak poniżej.

Obliczanie całki ułamków prostych drugiego rodzaju

$$\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}dx, \qquad (\triangle = b^2 - 4ac < 0).$$

Powyższą całkę sprowadzamy do postaci kanonicznej

$$\int \frac{Ax + B}{[a(x - p)^2 + q]^n}dx, \qquad \left(p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{\triangle}{4a}\right);$$

następnie wykonując podstawienie $x - p = \sqrt{q/a}\, t$, mamy

$$\int \frac{Ct + D}{(t^2 + 1)^n}dt.$$

Teraz należy ja rozbić na dwie całki $C \int \frac{t}{(t^2+1)^n}dt$ oraz $D \int \frac{1}{(t^2+1)^n}dt$. Pierwszą obliczmy przez podstawienie $w = t^2 + 1$, a drugą przy stosując wzór indukcyjny nr 26.

Uwaga 4. Jeżeli $W(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ oraz stopień wielomianu $P(x)$ jest niemniejszy od stopnia wielomianu $Q(x)$ to najpierw należy podzielić wielomian $P(x)$ przez $Q(x)$. Jeżeli w wyniku tego dzielenia otrzymamy wielomian $Z(x)$ oraz resztę z dzielenia $R(x)$, to wówczas możemy zapisać:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = Z(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}. \tag{3}$$

b) Całkowanie pewnych całek niewymiernych:

1. Jeżeli funkcja podcałkowa jest iloczynem funkcji wymiernej oraz pewnej ilości potęg postaci $(ax+b)^{\frac{n_1}{m_1}}$, $(ax+b)^{\frac{n_2}{m_2}}, \dots$ lub $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_1}{m_1}}$, $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_2}{m_2}}, \dots$ gdzie $n_i, m_i \in \mathbb{N}$ są względnie pierwsze to stosujemy odpowiednio podstawienia

$$ax+b = t^M \quad \text{lub} \quad \frac{ax+b}{cx+d} = t^M \tag{4}$$

gdzie M to najmniejsza wspólna wielokrotność m_1, $m_2, \dots$

2a. Całkę postaci $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ sprowadzamy do $\int \frac{dx}{\sqrt{a(x-p)^2+q}}$ i dokonujemy podstawienia $x - p = \sqrt{\frac{1}{|a|}}t$.

2b. Całkę postaci $\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$ sprowadzamy do $\int \sqrt{a(x-p)^2+q}dx$ i dokonujemy podstawienia $x-p = \sqrt{\frac{1}{|a|}}t$, a następnie stosujemy wzory(wymiennie)

$$\boxed{\int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}| + c;}$$

lub

$$\boxed{\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c.}$$

c) Całkowanie pewnych wyrażeń trygonometrycznych:

1. Całkę $\int W(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x)dx$ obliczmy przez podstawienie $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Wówczas mamy:

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

2. Całkę $\int W(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x\cos x)dx$ obliczmy przez podstawienie $t = \operatorname{tg} x$. Wówczas mamy:

$$dx = \frac{1}{1+t^2}dt, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

3. Całkę postaci $\int \sin^m x\cos^n x dx$, $n, m \in \mathbb{N}$ liczmy:
   a) gdy m, n są parzyste jak podpunkcie 2;
   b) gdy m jest nieparzyste, przez podstawienie $t = \cos x$,
   c) gdy n jest nieparzyste, przez podstawienie $t = \sin x$.

4. Całki postaci $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax\cos bx dx$, $\int \sin ax \cos bx$ obliczmy korzystając ze wzorów:

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)],$$

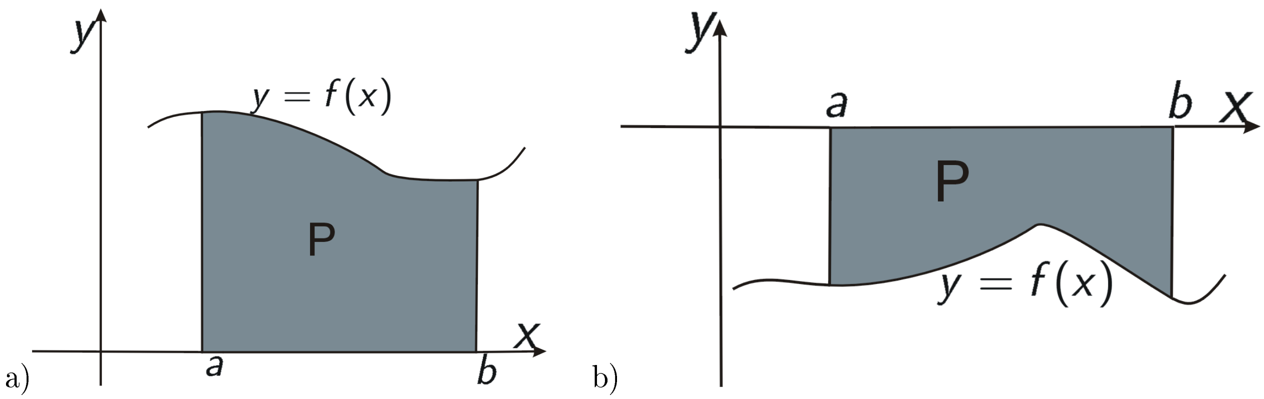
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)],$$

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)].$$

Interpretacja geometryczna całki oznaczonej (zastosowanie całki oznaczonej do liczenia pól obszarów płaskich)

Jeżeli funkcja podcałkowa f jest nieujemna, to całkę oznaczoną $\int\limits_a^b f(x)dx$ interpretujemy jako pole P obszaru płaskiego ograniczonego wykresem funkcji $y = f(x)$, osią Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ (patrz Rysunek 1 a)):

$$P = \int_a^b f(x)dx, \text{ jeżeli } f(x) \geq 0 \text{ dla } x \in [a, b].$$



Rysunek 1: Interpretacja geometryczna całki oznaczonej.

Jeżeli funkcja f jest niedodatnia na przedziale $[a, b]$ to pole P obszaru płaskiego ograniczonego wykresem funkcji $y = f(x)$, osią Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ równe jest $-\int\limits_a^b f(x)dx$ (patrz Rysunek 1 b)).

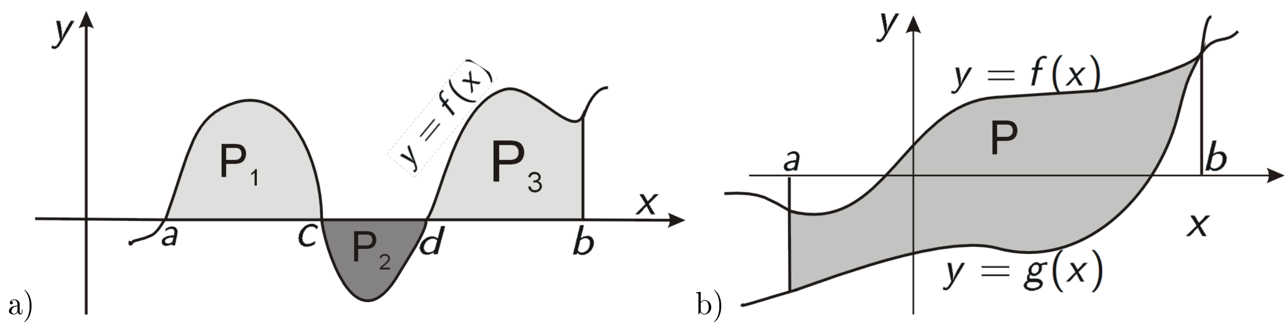
$$P = -\int_a^b f(x)dx, \text{ jeżeli } f(x) \leq 0 \text{ dla } x \in [a, b].$$

Jeżeli funkcja f na przedziale $[a, b]$ zmienia znak, to pole P obszaru płaskiego ograniczonego wykresem funkcji $y = f(x)$, osią Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ równe jest sumie pól położonych powyżej osi Ox i poniżej osi (patrz rysunek 2a), gdzie:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx.$$

Jeżeli krzywe $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$ dla $x \in [a, b]$ spełniają nierówność $f(x) \geq g(x)$ co oznacza, że wykres funkcji f znajduje się powyżej wykresu funkcji g, to pole obszaru ograniczonego tymi krzywymi oraz prostymi $x = a$, $x = b$ (patrz rysunek 2b) wyraża się wzorem:

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$



Rysunek 2: Zastosowanie całki oznaczonej do liczenia pól obszarów płaskich.

Twierdzenie 5. *(podstawowe własności całki oznaczonej)*
Niech funkcje f i g będą całkowalne na przedziale $[a, b]$, $k = const.$ oraz $c \in [a, b]$. Wówczas:

a) $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx;$

b) $\int\limits_a^b k \cdot f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx;$

c) $\int\limits_a^b \Big(f(x) \pm g(x)\Big)dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx;$

d) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$

Definicja 6. Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowalna na przedziale $[a, b]$, to funkcję:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad \text{dla } \ x \in [a, b]$$

określoną na przedziale $[a, b]$ nazywać będziemy funkcją górnej granicy całkowania.

Twierdzenie 7. *(wzór Newtona-Leibniza - część druga głównego twierdzenia rachunku całkowego)*
Jeśli f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i F jest funkcją pierwotną funkcji f, to

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Twierdzenie 8. *(podstawianie w całce oznaczonej)*
Jeżeli za zmienną niezależną ciągłej funkcji $f(x)$ podstawimy nową zmienną

$$x = \phi(t), \quad dla \ \ t \in [\alpha, \beta],$$

gidze:

- $\phi(t) \in [a, b]$ *dla* $t \in [\alpha, \beta]$;

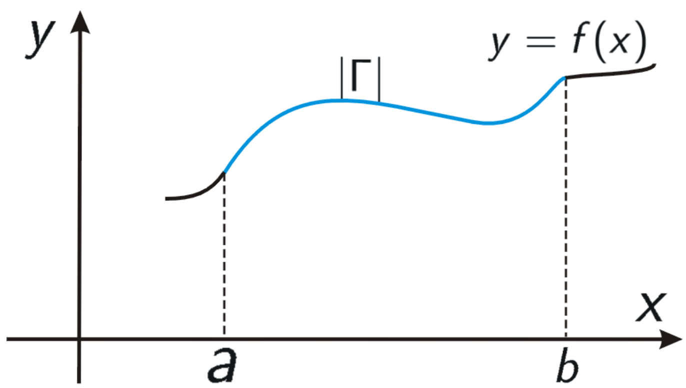
- $\phi(\alpha) = a,\ \phi(\beta) = b$;
- $\phi'(t)$ *jest ciągła na przedziale* $[\alpha, \beta]$

to:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[\phi(t)\right]\phi'(t)dt. \tag{5}$$

Dalsze zastosowania całki oznaczonej
Długość krzywej:
Długość krzywej $\Gamma : y = f(x)$ dla $x \in [a, b]$ (patrz rysunek 3) wyraża się wzorem:

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$



Rysunek 3: Długość łuku.

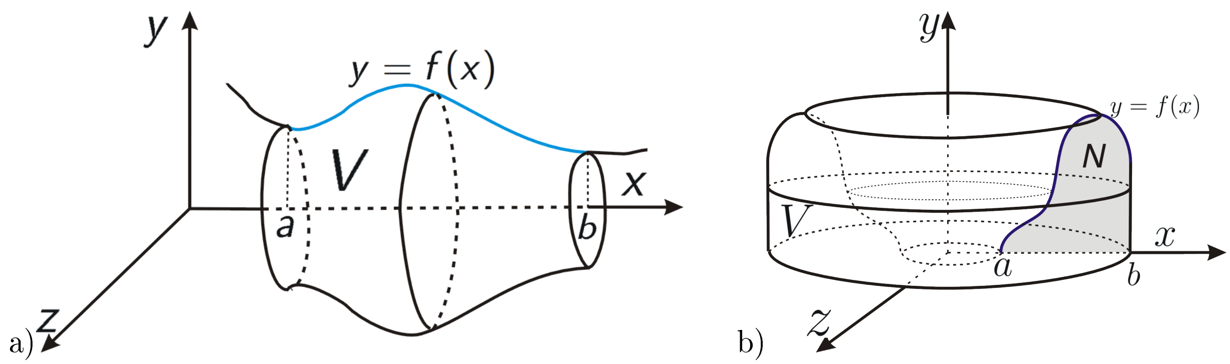
Objętość brył obrotowych:
Objętość V bryły powstałej z:

a) obrotu wokół osi Ox obszaru $\mathcal{N}:\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)$ (rysunek 4a) wyraża się wzorem:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx,$$

b) obrotu wokół osi Oy obszaru $\mathcal{N}:\ 0 \le a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)$ (innymi słowy objętość bryły powstałej z obrotu obszaru "pod krzywą"$y = f(x)$) (rysunek 4b) wyraża się wzorem:

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx.$$



Rysunek 4: Objętość brył powstałych z obrotu $f(x)$ wokół: a) osi Ox b) Osi Oy.

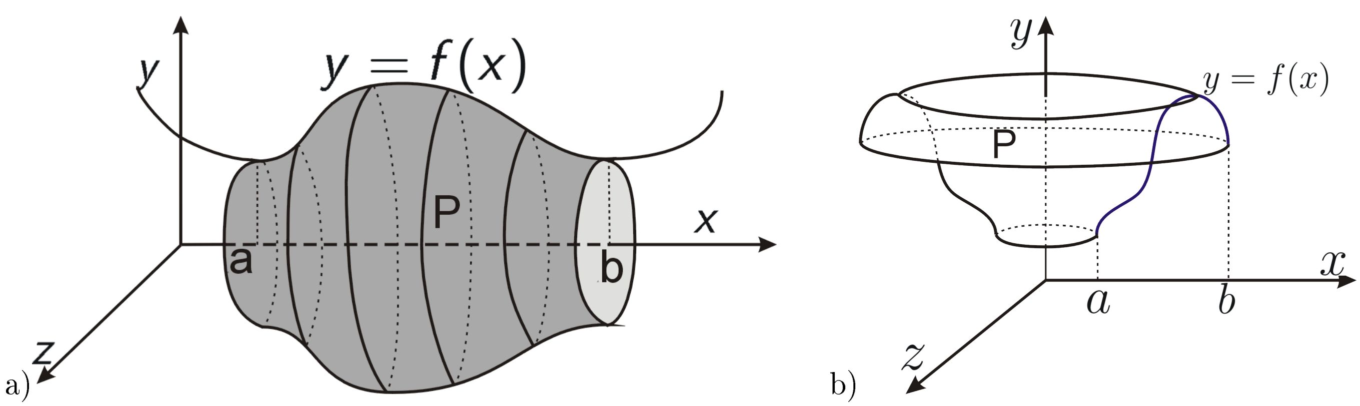
Pole powierzchni brył obrotowych:
Pole powierzchni powstałej z obrotu:

a) wokół osi Ox wykresu funkcji $f(x)$ dla $a \leq x \leq b$, wyraża się wzorem:

$$P = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx,$$

b) wokół osi Oy wykresu funkcji $f(x)$ dla $0 \leq a \leq x \leq b$, wyraża się wzorem:

$$P = 2\pi \int\limits_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$



Rysunek 5: Pole powierzchni brył powstałych z obrotu $f(x)$ wokół: a) osi Ox b) Osi Oy.

Twierdzenie 9. *(I-sze twierdzenie o wartości średniej)*
Niech funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz niech funkcja $g(x)$ ma stały znak w przedziale $[a, b]$ (nieujemna lub niedodatnia) i $g(x)$ będzie całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$. Wówczas istnieje liczba $c \in [a, b]$ taka, że:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)dx. \tag{6}$$

Wniosek 10. *(twierdzenie o wartości średniej)*
Jeżeli $g(x) \equiv 1$, *to z twierdzenia 9 mamy, że istnieje* $c \in [a, b]$ *takie, że:*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx. \tag{7}$$

Wartość $\mu = f(c)$ *nazywamy wartością średnią funkcji* $f(x)$ *na przedziale* $[a, b]$.