Ciągi i szeregi liczbowe

podstawowe informacje pomocnicze

Definicja 1. Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję (a_n) odwzorowującą zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych tzn.

$$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Wartości tej funkcji dla danej liczby naturalnej n nazywamy n-tym wyrazem ciągu i oznaczamy a_n (b_n itp.). Ciąg oznaczamy (a_n) a zbiór jego wyrazów (czyli wartości funkcji) $\{a_n\}$.

Przykład 2. Ciąg przyporządkowujący każdej liczbie naturalnej n jej potrójną wartość pomniejszoną o 2 ma wzór: $a_n = 3n - 2$.
Wyrazami tego ciągu są: $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 7, \ldots$

Definicja 3. Mówimy, że ciąg (a_n) jest:

- ograniczony z góry, gdy ciąg jego wyrazów jest ograniczony z góry tzn.

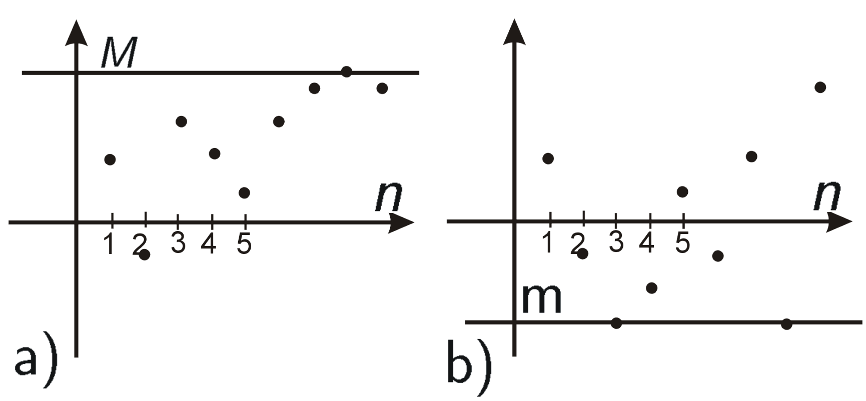
$$\exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \ a_n \le M;$$

- ograniczony z dołu, gdy ciąg jego wyrazów jest ograniczony z dołu tzn.

$$\exists_{m\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \ m \le a_n;$$

- ograniczony, gdy ciąg jego wyrazów jest ograniczony zarówno góry jak i dołu tzn.

$$\exists_{M,m\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \ m \le a_n \le M.$$



Rysunek 1: ciąg ograniczony a) z góry b) z dołu

Przykład 4. Rozważmy ograniczoność ciągów:

a) a_n : liczb parzystych;

b) $b_n = \frac{3n}{n+2}$;

c) $c_n = (-1)^n n$.

Rozwiązanie: *a*) Ciąg a_n jest ograniczony z dołu przez wyraz 0, natomiast z góry nie jest ograniczony przez żadną liczbę rzeczywistą.

b) Ciąg b_n jest ograniczony zarówno z góry jak i z dołu, a więc i ograniczony, gdyż:

$$m = 0 < \frac{3n}{n+2} = \frac{3n+6-6}{n+2} = 3 - \frac{6}{n+2} < 3 = M.$$

c) Ciąg c_n, który przyjmuje wartości: $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots$ nie jest ograniczony ani z dołu, ani z góry.

Definicja 5. Ciąg (a_n) nazywamy:

- rosnącym gdy
$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad a_n < a_{n+1};$$
- malejącym gdy
$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad a_n > a_{n+1}.$$

Analogicznie określamy ciągi: niemalejący i nierosnący.

Ciągi malejące i rosnące nazywamy ściśle monotonicznymi a nierosnące i niemalejące monotonicznymi. Mówimy też o ciągach monotonicznych od pewnego wyrazu.

Przykład 6. Zbadaj monotoniczność ciągu $a_n = \frac{3n}{n+2}$.
Rozwiązanie: Ponieważ:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)}{(n+1)+2} - \frac{3n}{n+2} = \frac{3n+3}{n+3} - \frac{3n}{n+2}$$
$$= \frac{3n^2+6n+3n+6-3n^2-9n}{(n+3)(n+2)} = \frac{6}{(n+3)(n+2)} > 0,$$

więc $a_{n+1} > a_n$. Zatem ciąg a_n jest rosnący.

Tabelka odczytywania monotoniczności ciągu: Dla ciągów o wyrazach dodatnich, w celu badania monotoniczności zamiast badać różnicę $a_{n+1} - a_n$ można badać wartość ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ w stosunku do wartości 1 (jeden).

$a_{n+1} - a_n$	$\frac{a_{n+1}}{a_n}$	monotoniczność
> 0	> 1	rosnący
$= 0$	$= 1$	stały
< 0	< 1	malejący
≥ 0	≥ 1	niemalejący
≤ 0	≤ 1	nierosnący

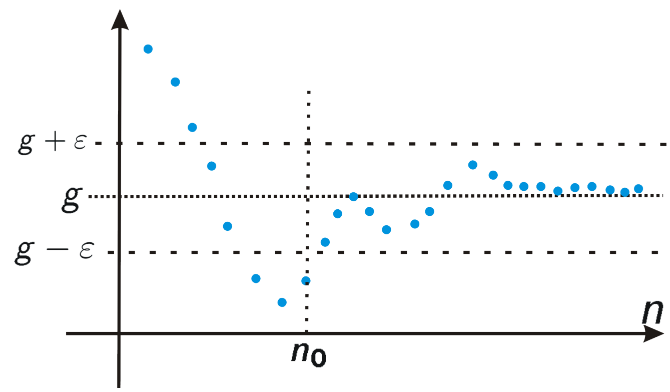
Przykład 7. Zbadaj monotoniczność ciągu $a_n = \frac{n!}{5^n}$
Rozwiązanie: Ponieważ:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} : \frac{n!}{5^n} = \frac{n! \cdot (n+1)}{5 \cdot 5^n} \cdot \frac{5^n}{n!} = \frac{n+1}{5},$$

oraz $\frac{n+1}{5} > 1$ dla $n > 6$, więc ciąg ten jest monotonicznie rosnący dla $n > 6$.

Definicja 8. (granica właściwa)
Mówimy, że ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n>n_0}\ |a_n - g| < \varepsilon.$$



Rysunek 2: Ilustracja geometryczna granicy właściwej ciągu

Przykład 9. Na podstawie powyższej definicji wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1.$$

Rozwiązanie: Zgodnie z definicją granicy właściwej dla dowolnego $\varepsilon > 0$ musimy wykazać istnienie $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takiego, że

$$\left|\frac{n+2}{n} - 1\right| < \varepsilon.$$

Zatem, niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolne, wówczas

$$|\frac{n+2}{n} - 1| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |\frac{2}{n}| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{2}{\varepsilon}.$$

Zatem za n_0 możemy wziąć część całkowitą liczby $\frac{2}{\varepsilon}$ powiększoną o jeden. Np. dla $\varepsilon = 0,01$ mamy $n_0 = [\frac{2}{0,01}] + 1 = 201$.

Definicja 10. (granica niewłaściwa $+\infty$)
Mówimy, że ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy $+\infty$ co zapisujemy $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ gdy

$$\forall_{M>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n>n_0}\ a_n > M.$$

Definicja 11. (granica niewłaściwa $-\infty$)
Mówimy, że ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy $-\infty$ co zapisujemy $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, gdy

$$\forall_{M>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n>n_0}\ a_n < -M.$$

Twierdzenie 12. *(o arytmetyce granic ciągów)*
Dla ciągów (a_n), (b_n) zbieżnych lub rozbieżnych do ∞ lub $-\infty$ zachodzą:

a) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n;$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n},$ *jeśli* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0;$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^p = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^p, \quad p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\};$

o ile powyższe działania są wykonywalne w zbiorze liczb rzeczywistych.

Granice niektórych ciągów:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0,$ *b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0,\ \alpha > 0$ *c)* $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty,\ \alpha > 0$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0,\ |a| < 1$ *e)* $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty,\ a > 1$ *f)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ *h)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0,\ \alpha > 0,\ a > 1$ *i)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0,\ n > 1$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$ *k)* $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty,\ \ a > 1$ *l)* $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0,\ \ |a| < 1$

m) $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$ *n)* $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})^n = e^{-1}$ *o)* $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{a}{n})^n = e^a$

p) $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e$ o ile (a_n) to ciąg o wyrazach dodatnich zbieżny do granicy niewłaściwej $(\pm\infty)$.

Wskazówka: Przy liczeniu granic ciągu typu "wielomian"przez "wielomian", jeżeli

- licznik i mianownik są tego samego stopnia, to granica jest równa ilorazowi współczynników przy najwyższej potędze;
- licznik jest niższego stopnia niż mianownik, to granica jest równa zero;
- licznik jest wyższego stopnia niż mianownik, to granica jest równa $+\infty$(gdy współczynniki przy najwyższych potęgach są tego samego znaku) lub $-\infty$(gdy współczynniki przy najwyższych potęgach są tego samego znaku).

Tabelka odczytywania wartości pewnych wyrażeń:

$a + \infty = \infty,\ -\infty < a \leq \infty$	$a \cdot \infty = \infty,\ 0 < a \leq \infty$
$\frac{a}{\infty} = 0,\ -\infty < a < \infty$	$\frac{a}{0^+} = \infty,\ 0 < a \leq \infty$
$\frac{a}{0^+} = -\infty,\ -\infty \leq a < 0$	$\frac{a}{0^-} = -\infty,\ 0 < a \leq \infty$
$\frac{a}{0^-} = \infty,\ -\infty \leq a < 0$	
$a^\infty = 0,\ 0^+ \leq a < 1$	$a^\infty = \infty, 1 < a \leq \infty$
$\infty^a = 0,\ -\infty \leq a < 0$	$\infty^a = \infty,\ 0 < b \leq \infty$

Symbole nieoznaczone: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0

Twierdzenie 13. *(o ciągu monotonicznym i ograniczonym)*
Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny, przy czym:

- *ciąg niemalejący i ograniczony z góry jest zbieżny do granicy, która jest kresem górnym zbioru jego wartości,*

- *ciąg nierosnący i ograniczony z dołu jest zbieżny do granicy, która jest kresem dolnym zbioru jego wartości.*

Twierdzenie 14. *(o dwóch ciągach)*
Jeśli ciągi (a_n) i (b_n) spełniają warunki:

1) $a_n \leq b_n$ *(lub $a_n \geq b_n$) dla każdego $n \geq n_0$, gdzie $n, n_0 \in \mathbb{N}$,*

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ *(lub $-\infty$)*

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ *(lub $-\infty$).*

Twierdzenie 15. *(o trzech ciągach)*
Jeśli ciągi (a_n), (b_n) i (c_n) spełniają warunki:

1) $a_n \leq b_n \leq c_n$ *dla każdego $n \geq n_0$, gdzie $n, n_0 \in \mathbb{N}$,*

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = q$

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = q$.

Kilka prostych przykładów obliczania granic ciągów:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2-n}{2n^2+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(3-\frac{1}{n})}{n^2(2+\frac{4}{n^2})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{n}}{2+\frac{4}{n^2}} = \frac{3}{2}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2-4}{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(4n-\frac{4}{n})}{n(2-\frac{1}{n})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-\frac{4}{n}}{2-\frac{1}{n}} = +\infty$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+4}{2n^3+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3(\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3})}{n^3(2+\frac{1}{n})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{2+\frac{1}{n}} = 0$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+5^n} = ...$

Tutaj skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach. Niech $b_n = \sqrt[n]{2^n+5^n}$, ponieważ zachodzą nierówności

$$a_n = 5 = \sqrt[n]{5^n} < \sqrt[n]{2^n+5^n} < \sqrt[n]{5^n+5^n} = \sqrt[n]{2\cdot 5^n} = 5\sqrt[n]{2} = c_n$$

oraz $\lim\limits_{n\to\infty} 5 = 5$ jak również $\lim\limits_{n\to\infty} 5\sqrt[n]{2} = 5$, więc

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+5^n} = 5.$$

e)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-2n} - n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2-2n}-n)(\sqrt{n^2-2n}+n)}{\sqrt{n^2-2n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n-n^2}{\sqrt{n^2-2n}+n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2n}{\sqrt{n^2-2n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(-2)}{n(\sqrt{1-\frac{2}{n}}+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{n}}+1} = \frac{-2}{2} = -1;$$

f)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+4}{2n+1}\right)^{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1+3}{2n+1}\right)^{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n+1}\right)^{3n-1}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{3}}\right)^{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{3}}\right)^{\frac{2n+1}{3}\cdot\frac{3(3n-1)}{2n+1}}=e^{\frac{9}{2}},$$

gdyż $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(3n-1)}{2n+1}=\frac{9}{2}$.

Definicja 16. Niech (a_n) to ciąg liczbowy. Szeregiem liczbowym nazywamy ciąg (S_n) sum częściowych:

$$\begin{gathered}S_1=a_1,\\ S_2=a_1+a_2,\\ \vdots\\ S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\end{gathered}$$

i oznaczamy go symbolem $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Definicja 17. Jeżeli istnieje granica właściwa $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, to liczbę S nazywamy sumą szeregu liczbowego i piszemy, $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, a szereg nazywamy zbieżnym. Jeżeli $S=\pm\infty$, to mówimy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest rozbieżny do $\pm\infty$.

Twierdzenie 18. (warunek konieczny zbieżności szeregu)
Jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Twierdzenie 19. (kryterium porównawcze)
Niech $0\le a_n\le b_n$ dla każdego $n>n_0$, $n_0\in\mathbb{N}$. Jeśli zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, to zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Jeśli $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest rozbieżny, to rozbieżny jest $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

Twierdzenie 20. (kryterium d'Alamberta)
Niech $a_n\ge 0$ dla $n\in\mathbb{N}$ i istnieje granica $g:=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\in[0,\infty]$. Wówczas jeśli $g\in[0,1)$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny. Jeśli $g\in(1,\infty]$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest rozbieżny. W przypadku $g=1$ kryterium nie rozstrzyga zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Twierdzenie 21. (kryterium Cauchy'ego)
Niech $a_n\ge 0$ dla $n\in\mathbb{N}$ i istnieje granica $g:=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\in[0,\infty]$. Wówczas jeśli $g\in[0,1)$,

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny. Jeśli* $g \in (1, \infty]$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny. W przypadku* $g = 1$ *kryterium nie rozstrzyga zbieżności szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Uwaga 22. Kryterium Cauchy'ego jest silniejsze niż kryterium d'Alemberta tzn. jeśli szereg spełnia kryterium d'Alemberta, to spełnia warunek Cauchy'ego (jednakże czasami wygodniej jest zastosować kryterium d'Alemberta).

Twierdzenie 23. (kryterium Leibniza)
Jeżeli w szeregu przemiennym $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *począwszy od pewnego miejsca (wyrazu)* n_0 *bezwzględne wartości wyrazów szeregu dążą monotonicznie do zera, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny.*

Uwaga 24. Niech szereg naprzemienny ma postać:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \qquad \text{gdzie} \quad a_n > 0 \tag{1}$$

Wówczas, aby wykazać zbieżność szeregu (1) z kryterium Leibniza należy stwierdzić, że:

- $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$
- ciąg (a_n) począwszy od pewnego wyrazu n_0 jest malejący.

Definicja 25. (Szereg harmoniczny (Dirichleta))
Szeregiem harmonicznym o wykładniku $\alpha \in \mathbb{R}$ nazywamy szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Twierdzenie 26. *Szereg harmoniczny* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *o wykładniku* α *jest:*
a) zbieżny dla $\alpha > 1$;
b) rozbieżny dla $\alpha \leq 1$.

Definicja 27. (zbieżność bezwzględna i warunkowa szeregu)
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy zbieżnym bezwzględnie jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Szereg zbieżny, który nie jest zbieżny bezwzględnie, nazywamy zbieżnym warunkowo.

Twierdzenie 28. *Szereg zbieżny bezwzględnie jest zbieżny.*

Przydatne nierówności:

- $\ln x < x - 1$ dla każdego $x > 0$;
- $\ln(x+1) < x$ dla każdego $x > -1$;
- $\sin x \leq x$ dla każdego $x > 0$;
- $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$ dla każdego $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

- $\operatorname{tg} x > x$ dla każdego $x \in (0, \frac{\pi}{2})$;
- $\operatorname{tg} x \leq \frac{4}{\pi} x$ dla każdego $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
- $|\sin x| \leq |x|$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$;
- $n^2 < 2^n$ dla każdego $n \geq 5$, $n \in \mathbb{N}$;
- $2^n \leq n!$ dla każdego $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$;
- $\binom{2n}{n} < 4^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$;
- $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$;
- $n^{n+1} > (n+1)^n$ dla każdego naturalnego $n \geq 3$;
- $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e < 3$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$;

Zestaw I

1. Znaleźć cztery początkowe wyrazy poniżej określonych ciągów ciągów:
(a) $a_n = \sqrt[n]{n+1}$ (b) $b_n = (1+\frac{1}{n})^n$ (c) $c_n = \frac{n^n}{n!}$ (d) $d_n = \begin{cases} 3^n & \text{dla } n \text{ nieparzystego} \\ n^3 & \text{dla } n \text{ parzystego} \end{cases}$
(e) $e_n = \dfrac{\binom{n+2}{n}+\binom{n+1}{n}}{\binom{n+3}{n+1}}$ (f) $f_1 = 7,\ f_{n+1} = f_n + 3$ (g) $g_1 = 1,\ g_2 = 3,\ g_{n+2} = g_n + g_{n+1}$
(h) $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_n = g_{n-1} + g_{n-2}$- tzw. ciąg Fibonacciego.

2. Zbadaj monotoniczność ciągów (a_n):
(a) $a_n = \frac{3n-2}{5n+1}$, (b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}$, (c) $a_n = \frac{4^n}{(2n)!}$

3. Zbadaj ograniczoność ciągów (a_n):
(a) $a_n = \frac{4n^2}{n^2+1}$, (b) $a_n = n[1+(-1)^n]$, (c) $a_n = 4 - n^2$,
(d) $a_n = 3^n \sin\frac{n\pi}{2}$, (e) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

4. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym wykaż zbieżność podanych ciągów (a_n):
(a) $a_n = \frac{2n-1}{n}$, (b) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, (c) $a_n = \frac{n^2}{5^n}$.

5. Zbadaj zbieżność i oblicz granice ciągów określonych rekurencyjnie:
(a) $a_1 = \sqrt{5},\ a_{n+1} = \sqrt{5 + a_n}$, (b) $a_1 = \frac{3}{2},\ a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2}$.

6. W oparciu o definicję granicy ciągu udowodnij, że
(a) $\lim\limits_{n\to\infty} 3n - 1 = +\infty$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{4n+1} = \frac{3}{4}$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} -n^2 + 2n = -\infty$

7. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów, oblicz granice podanych ciągów (o ile istnieją):
(*a*) $a_n = n^2 + 5n - 6$, (*b*) $b_n = -n^2 - 3n + 5$, (*c*) $a_n = 1 + \frac{1}{2n+3}$,
(*d*) $a_n = \frac{5n^2+3n}{n^2-2}$, (*e*) $a_n = \frac{n^2-3n}{n^3+4}$, (*f*) $a_n = \frac{2n^4+3n^2-1}{n^3-4}$,
(*g*) $a_n = \frac{(1-2n)^3}{(2n+3)(1-7n)^2}$, (*h*) $a_n = \left(\frac{5-3n}{1-2n}\right)^2$, (*i*) $a_n = \frac{(2n+1)(2n-1)}{(3n+6)(2n+2)}$,
(*j*) $a_n = \frac{2n^2-3n+4}{\sqrt{n^4+4}}$, (*k*) $a_n = \sqrt{\frac{4n^3+n^2}{n^3+2}}$, (*l*) $a_n = \sqrt{n+5} - \sqrt{n}$,
(*m*) $a_n = \sqrt{n^2-2n} - n$, (*n*) $a_n = \sqrt[3]{n^3+3n^2} - n$, (*o*) $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$,
(*p*) $a_n = \frac{6^n-4^n}{5^n+3^n}$, (*q*) $a_n = \frac{3\cdot 2^{2n}-5}{8\cdot 4^n+5}$, (*r*) $a_n = \frac{3^{n+2}-2\cdot 7^n}{9^n+5^{n-1}}$,
(*s*) $a_n = \sqrt{3^{2n} - 2\cdot 7^n}$, (*t*) $a_n = \frac{(n+1)!+n!}{(n+1)!-n!}$, (*u*) $a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{6n^2+3}$,
(*v*) $a_n = n\frac{1+2+7+\ldots+(3n-2)}{n^3+1}$, (*w*) $a_n = \frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\ldots+\frac{1}{6^n}}{\frac{3}{5}+\frac{9}{25}+\ldots+(\frac{3}{5})^n}$, (*x*) $a_n = \frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$,
(*y*) $a_n = \log_7 \frac{49n^2-1}{n^2+4}$, (*z*) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n^2-2}{2}}$, (*a*$_2$) $a_n = 3^{n^2+5n-6}$,
(*b*$_2$) $a_n = 7^{\frac{-3n^3+1}{n^2+1}}$, (*c*$_2$) $a_n = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n^2-2}{n}$, (*d*$_2$) $a_n = \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{7n^3+4n^2-3n-2}$.

8. Korzystając z definicji liczby e obliczyć granice:
(*a*) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ (*b*) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-4}{n}\right)^{2n}$ (*c*) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$ (*d*) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2}$
(*e*) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n-3}\right)^{3n}$ (*f*) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+3}{3n^2+1}\right)^{3n-1}$ (*g*) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-3}{n^2+1}\right)^{5n^2}$ (*h*) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+5}{n^3-2}\right)^{6n^2+3n}$.

9. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć podane granice:
   $(a)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n+5^n}$ $(b)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}$ $(c)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n^2}{n}$
   $(d)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sin 2n}{(3n-1)^2}$ $(e)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ $(f)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+3}.$

10. Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach obliczyć granice podanych ciągów.
   $(a)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n^2}{n-\sin n}$ $(b)\ \lim\limits_{n\to\infty}[n^4+(-1)^n n]$ $(c)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7^n+5^n}{5^n+3^n}$ $(d)\ \lim\limits_{n\to\infty}(\sin n-2)n^2.$

11. Wykazać, że ciąg (a_n) nie ma granicy
   (a) $a_n=(-1)^n$ (b) $b_n=n^{(-1)^n+1}$ (c) $c_n=(1+(-1)^n)+\frac{n}{n+5}$
   (d) $d_n=n[1-(-1)^n]$ (e) $e_n=\frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$ (f) $f_n=\sin\frac{n\pi}{2}+\cos\frac{n\pi}{2}.$

12. Wyznacz sumę szeregu oraz znajdź jego wyraz ogólny, jeżeli jego suma częściowa $S_n=\frac{2n}{2n+1}$.

13. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ w zależności od parametru q.

14. Podaj wzór ciągu sum częściowych (S_n) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n}$.

15. Obliczyć sumy podanych szeregów:
   $(a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $(b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n$ $(c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-1}{5^n}$ $(d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}+2^n}{8^n}$
   $(e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ $(f)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ $(g)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ $(h)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

16. Zbadać czy podane szeregi spełniają warunek konieczny zbieżności szeregów:
   $(a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2)^n$ $(b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$ $(c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3-1}$ $(d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ $(f)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+2}{2^{3n}-1}$

17. Zbadać zbieżność podanych szeregów korzystając z:

   - kryterium porównawczego
     $(a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$ $(b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^2\frac{1}{\sqrt{n}}$ $(c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^n-1}$ $(d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}}$
     $(e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^2+3},$ $(h)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ $(i)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+n)}}$
   - kryterium Cauchy'ego
     $(a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$ $(b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ $(c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ $(d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)$
     $(e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{3}{5}\right)^n$ $(f)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{n^2}$ $(g)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$ $(h)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2nn^{n^2}}{(3n+1)^{n^2}},$
     $(i)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$
   - kryterium d'Alamberta
     $(a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{3^n}$ $(b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ $(c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{50^n}{n!}$ $(d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$
     $(e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(2n)!}$ $(f)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^{3n+4}$ $(g)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n!)^2}{n^{2n-1}}$ $(h)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1},$

- kryterium Leibniza

  (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2+3}$ (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos(\pi n^2)$

  (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+2}$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$,

18. Zbadać zbieżność bezwzględną i warunkową podanych szeregów:

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

    (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{4n-1}$

19. Korzystając z kryteriów zbieżności szeregów, wykaż że:

    (a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \sin^2 \frac{1}{n} = 0$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n} = 0$ (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} = 0$