Ogólna teoria miary i całki:

3. całkowanie

Zadania

1. Niech będą dane ciągi funkcyjne

   a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := n \cdot \chi_{[n, n+\frac{1}{n}]}(x)$.

   b) $f_n(x) := \begin{cases} n & \text{dla } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$

   c) $f_n(x) := \begin{cases} n^2 & \text{dla } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$

   d) $f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla } 0 < x < n \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$

   Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$, $\int\limits_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to\infty} f_n dx$, $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n dx$ oraz przeanalizuj istotność założeń twierdzeń 1 i 2 dla ciągów f_n.

2. Wyznacz granicę ciągu całek Lebesgue'a:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{1+x^2} dx$;

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[n]{x}} dx$;

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x} dx$;

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{(1+x)^n}{1+(1+x)^n}\right) e^{-2x} dx$.

3. Zweryfikuj prawdziwość twierdzenia 1 dla całki Riemana na przedziale $[0, 1]$ z ciagiem funkcyjnym

   $$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } x = q_i \text{ dla pewnych } 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

   gdzie q_i to różne liczby wymierne z przedziału $[0, 1]$.

4. Wyznacz jeśli istnieją całki Lebesgue'a:

   a) $\int\limits_0^1 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt[3]{x-1}} dx$ wskazówka: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$,

   b) $\int\limits_0^{+\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} e^{-2^n x} dx$

5. Wykaż, że istnieją i oblicz podane całki

   a) $\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)dxdy$,

   b) $\int_0^1\int_0^2 x \cdot sgn\,(x+y-1)dxdy$,

   c) $\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{x^2+y^2}dxdy$,

   d) $\iint_A \cos(x+y)dxdy$, gdzie A jest obszarem ograniczonym prostymi $y=0,\ y=x,\ x+y=\frac{\pi}{2}$,

   e) $\iiint_A (xy^2+z)dxdydz$, gdzie $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ 0\le x\le 1, |y|\le x.|z|\le x\}$

6. Wykaż, że podane całki w sensie Lebesque'a nie istnieją:

   a) $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{x-y}dxdy$

   b $\int_1^{+\infty}\int_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy$

   c) $\int_{-1}^1\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dxdy$ (wykonać po zadaniu 7, a całki iterowane istnieją!!!)

7. Wprowadzając odpowiednie współrzędne obliczyć całki po wskazanych obszarach

   a) $\iiint_A (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ gdzie $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2\le 4,\ 0\le z\le 1\}$

   b) $\iint_A f(x,y)dxdy$ gdzie $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ (x-2)^2+(x+1)^2<1\}$ oraz

   $$f(x,y)=\begin{cases}\ln\sqrt{(x-2)^2+(x+1)^2} & \text{dla } (x,y)\neq(2,-1)\\ 0 & \text{dla } (x,y)=(2,-1),\end{cases}$$

   c) $\iiint_A ze^{-\frac{9x^2+4y^2}{2}}dxdydz$ gdzie $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1,\ -1\le z\le 2\}$,

   d) $\iiint_A zdxdydz$ gdzie $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2<1,\ \sqrt{x^2+y^2}<z,\ z>0\}$,

8. Dokonując odpowiednie podstawienie wyznacz całki Lebesgue'a

   a) $\iint_A (x+y)dxdy$ gdzie $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\le x\le y\le 2x, x+y\le 1\}$;

   b) $\iint_A \frac{y^2}{x^4y^4+1}dxdy$ gdzie $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0<y<x\}$;

9. Oblicz (granice ciągów funkcyjnych)

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\iint_A n\sin\frac{x}{n}dxdy$, gdzie A jest trójkątem o wierzchołkach $(0,0),\ (0,1),\ (1,2)$,

   b) $\lim\limits_{n\to\infty}\iint_A \sqrt[n]{x^2+y^2}\cdot\chi_{(0,\infty)}(x\cdot y)+(1-x^2-y^2)\cdot\chi_{(-\infty,0)}(x\cdot y)dxdy$,
   gdzie $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le 1\}$.

Informacje pomocnicze

Twierdzenie 1. *(tw. Lebegue'a o monotonicznym przechodzeniu pod znakiem całki)*
Niech $A \in \mathcal{F}$. Jeżeli $(f_n) : A \to [0, +\infty]$ jest:

a) niemalejącym ciągiem nieujemnych (tzn. $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots$) funkcji mierzalnych

lub

b) nierosnącym ciągiem (tzn. $f_1(x) \geq f_2(x) \geq f_3(x) \geq \cdots$) funkcji całkowalnych

oraz

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ dla } x \in A.$$

Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu.$$

Twierdzenie 2. *(Lebegue'a o zbieżności zmajoryzowanej)*
Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji mierzalnych określonych na zbiorze A. Ponadto istnieje całkowalna na zbiorze A funkcja g taka, że $|f_n| \leq g$ dla każdego naturalnego n. Wówczas granica $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ jest funkcją całkowalną oraz

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Twierdzenie 3. *(całkowanie szeregów nieujemnych wyraz za wyrazem)*
Jeżeli (f_n) jest ciągiem nieujemnych funkcji mierzalnych określonych na zbiorze A, to

$$\int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n d\mu.$$

Twierdzenie 4. *(o całkowaniu szeregów)*
Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji całkowalnych na zbiorze mierzalnym A. Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_A |f_n| d\mu < \infty$, to funkcja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest całkowalna oraz

$$\int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n d\mu.$$

Twierdzenie 5. *(o przeliczalnej addytywności względem dziedziny całkowania)*
Dla każdego ciągu (f_n) parami rozłącznych zbiorów mierzalnych A_n zachodzi:

$$\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f_n d\mu$$

o ile całka z lewej strony wzoru istnieje.

Twierdzenie 6. *(całkowanie przez podstawienie)*
Niech $\varphi : U \to V$ będzie dyfeomorfizmem (odwzorowanie różnowartościowe, nieosobliwe klasy C^1, takie, że φ^{-1} jest ciągłe), gdzie $U, V \subset \mathbb{R}^n$, $U-$zbiór otwarty. Ponadto, niech będzie dana funkcja f określona na zbiorze $\varphi(U)$. Wówczas:

a) funkcja f jest całkowalna na zbiorze $\varphi(U)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f(\varphi(t))\mathcal{J}(\varphi)$,

b) jeżeli funkcja f jest mierzalna i nieujemna lub całkowalna na $\varphi(U)$, to zachodzi tzw. wzór na całkowanie przez podstawienie:

$$\int\limits_{\varphi(U)=V} f(x)dx = \int\limits_{U} f\big(\varphi(t)\big)\big|\mathcal{J}(\varphi(t))\big|dt \ \ (\textit{w sensie Lebegue'a}),$$

gdzie $\mathcal{J}(\varphi)$ oznacza jakobian przekształcenia φ.

Twierdzenie 7. *(własności całki)*
W ustalonej przestrzeni z miarą $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ całka względem miary μ posiada następujące własności:

1) jeżeli istnieje całka $\int\limits_A f\, d\mu$ oraz $c \in \mathbb{R}$, to

$$\int\limits_A c\, f\, d\mu = c \int\limits_A f\, d\mu.$$

2) jeżeli funkcje mierzalne $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ są nieujemne lub całkowalne i ich suma jest określona ma zborze A, to

$$\int\limits_A (f+g)\, d\mu = \int\limits_A f\, d\mu + \int\limits_A g\, d\mu.$$

3) jeżeli $B, C \in \mathcal{F}$ oraz $B \cap C = \emptyset$, to

$$\int\limits_{B \cup C} f\, d\mu = \int\limits_B f\, d\mu + \int\limits_C f\, d\mu$$

o ile istnieją całki po prawej lub lewej stronie wzoru.

4) jeżeli istnieją całki $\int\limits_A f\, d\mu$ i $\int\limits_A g\, d\mu$ oraz $f \le g$, to

$$\int\limits_A f\, d\mu \le \int\limits_A g\, d\mu.$$

5) jeżeli funkcja $f : A \to [0, +\infty]$ jest mierzalna, $B \subset A$ i $B \in \mathcal{F}$, to

$$\int\limits_B f\, d\mu \le \int\limits_A f\, d\mu.$$

6) jeżeli funkcja $f : A \cup B \to \overline{\mathbb{R}}$ *jest mierzalna,* $A, B \in \mathcal{F}$ *oraz* $\mu(B) = 0$, *to*

$$\int\limits_{A\cup B} f\,d\mu = \int\limits_{A} f\,d\mu = \int\limits_{A\setminus B} f\,d\mu.$$

7) jeżeli funkcja $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ *jest mierzalna i* $\mu(A) = 0$, *to*

$$\int\limits_{A} f\,d\mu = 0.$$

8) jeżeli funkcja $f : A \to [0, +\infty]$ *jest mierzalna, to*

$$\int\limits_{A} f\,d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu(\{x \in A; f(x) \neq 0\}) = 0,$$

czyli f *jest równa zero prawie wszędzie.*

9) jeżeli funkcja f *jest całkowalna na zbiorze* A *oraz* $B \subset A$ *i* $B \in \mathcal{F}$, *to funkcja* f *jest całkowalna na zbiorze* B.

10) jeżeli istnieje całka $\int\limits_A f\,d\mu$, *to*

$$\left|\int\limits_{A} f\,d\mu\right| \leq \int\limits_{A} |f|\,d\mu$$

(funkcja f *jest całkowalna na zbiorze* A $\Leftrightarrow$ *funkcja* $|f|$ *jest całkowalna na tym zbiorze.)*

11) jeżeli funkcja $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ *jest mierzalna, funkcja* $g : A \to [0, +\infty]$ *jest całkowalna oraz* $|f| \leq g$, *to funkcja* f *jest całkowalna.*

12) funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ *mierzalna i ograniczona określona na zbiorze* A *miary skończonej jest całkowalna oraz*

$$\left|\int\limits_{A} f\,d\mu\right| \leq \sup_{x\in A} |f(x)| \cdot \mu(A).$$

13) iloczyn $f \cdot g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ *funkcji ograniczonej* $f : A \to \mathbb{R}$ *i całkowalnej* $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ *jest funkcją całkowalną.*

14) jeżeli funkcja $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ *jest całkowalna, to*

$$\mu\Big(\{x \in A : \quad f(x) = +\infty \qquad \textit{lub} \quad f(x) = -\infty\}\Big) = 0.$$

15) jeżeli funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ *jest całkowalna, to zbiór* $\{x \in A;\ f(x) \neq 0\}$ *można przedstawić w postaci przeliczalnej ilości zbiorów miary skończonej.*

16) jeżeli funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ *jest całkowalna, to*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{A\supset B\in\mathbb{F}} \quad \mu(B) < \delta \quad \Rightarrow \int\limits_{B} |f(x)|d\mu < \varepsilon.$$

(bezwzględna ciągłość całki względem miary).