Ogólna teoria miary i całki:

2. funkcje mierzalne i całka Lebesgue'a

Zadania

1. Na podstawie definicji funkcji mierzalnej wykaż, że funkcja dana wzorem jest borelowska:
   a) funkcja stała: $f(x) = c$, c=const.;
   b) funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
   c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla } x \in (0, +\infty), \\ -1 & \text{dla } x = 0; \end{cases}$
   d) $f(x) = sgn\, x$ ponadto wyznacz $\sigma(f)$;
   e) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \mathbb{Q}; \\ -x & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$
   f) $f(x, y) = \min\{x, y\}$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Wykaż, że jeżeli funkcje $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ są mierzalne oraz $g(x) \neq 0$ dla $x \in \Omega$, to funkcja $\frac{f}{g}$ jest mierzalna.
3. Wykaż, że jeżeli funkcja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ jest mierzalna, to funkcja $|f|$ jest mierzalna.
4. Podaj przykład funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pokazujący, że mierzalność funkcji f^2 nie pociąga mierzalność funkcji f.
5. Niech $f : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \chi_B(x) - \chi_A(x)$, gdzie $A, B \in \mathcal{F}$. Zbadaj mierzalność funkcji f oraz wyznacz $\sigma(f)$.
6. Pokaż, że pochodna $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcji różniczkowalnej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją borelowską.
7. Wyznacz na podstawie definicji następujące całki Lebesgue'a:
   a) $\int\limits_{[-3,3]} f dl$, gdzie $f(x) := \begin{cases} 2 & \text{dla } |x| < 2, \\ 3 & \text{dla } |x| > 2 \text{ i } |x| \leq 3, \\ 5 & \text{dla } |x| = 2, \end{cases}$
   b) $\int\limits_{[0,1]} f dl$, gdzie $f(x) = 2 + x$,
   c) $\int\limits_{[0,1]} f dl$, gdzie $f(x) = x^2$,
   d) $\int\limits_{[0,1]} f dl$, gdzie $f(x) = 3 \cdot sgn(5x - 2)$.

8. Niech C będzie zbiorem Cantora na odcinku $[0,1]$ oraz będzie dana funkcja

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \mathrm{C}, \\ n & \text{dla każdego usunietego przedziału w } n\text{−tym kroku.} \end{cases}$$

Oblicz całkę względem miary Lebesque'a $\int\limits_{[0,1]} f dl$.

9. Niech C będzie zbiorem Cantora na odcinku $[0,1]$. Określmy funkcję

$$f(x) := \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{dla } x \in [0;\frac{1}{2}] \setminus \mathrm{C}, \\ \cos(\pi x) & \text{dla } x \in [\frac{1}{2};1] \setminus \mathrm{C}, \\ x^2 & \text{dla } x \in \mathrm{C}. \end{cases}$$

Oblicz całkę względem miary Lebesque'a $\int\limits_{[0,1]} f dl$.

10. Niech będzie dana funkcja

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{dla } xy \text{ będącego liczbą wymierną,} \\ 3 & \text{dla } xy \text{ będącego liczbą niewymierną.} \end{cases}$$

Oblicz całkę względem miary Lebesque'a $\int\limits_{[0,1]\times[0,1]} f dl$.

11. Zbadaj istnienie całki Lebesgue'a, ewentualnie oblicz następujące całki:

a) $\int\limits_{[0,+\infty)} f dl$, gdzie $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$.

b) $\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} E\left(\frac{1}{(x_1+x_2)^2}\right) dx_1 dx_2$

c) $\int\limits_A x^2 dx$, gdzie $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}\right]$;

d) $\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} f(x_1,x_2) dx_1 dx_2$, gdzie

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{n}{2^n} & \text{dla } (x_1,x_2) \in (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}] \times [0, \frac{1}{n}], n \in \mathbb{N}^+; \\ 0 & \text{w pozostałych punktach kwadratu } [0,1]\times[0,1]. \end{cases}$$

12. Niech będzie dana funkcja

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{dla } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Rozważ istnienie (ewentualnie wyzancz) całki Riemana i Lebesgue'a na przedziale $[0,1]$.

13. Niech $E(x)$ to funkcja entier oraz będzie dana funkcja

$$f(x) := \frac{1}{E(x)} \cdot (-1)^{E(x)},$$

Rozważ istnienie (ewentualnie wyzancz) całki Riemana i Lebesgue'a na przedziale $[1,+\infty)$.

Informacje pomocnicze

Definicja 1. *(funkcja mierzalna)*
Niech $\mathcal{F}$ będzie $\sigma-$ ciałem podzbiorów zbioru Ω. Funkcję $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, gdzie $A \subset \Omega$ nazywamy mierzalną ($\sigma-$ mierzalną), jeżeli dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ zbiór

$$\{x \in A;\ f(x) < a\} \in \mathcal{F}.$$

Wniosek 2. *Mierzalność funkcji f oznacza, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a przeciwobraz $f^{-1}\big((-\infty, a)\big)$ należy do $\sigma-$algebry $\mathcal{F}$.*

Twierdzenie 3. *Niech $\mathcal{F}$ będzie $\sigma-$ ciałem podzbiorów zbioru Ω, $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, gdzie $A \subset \Omega$. Następujące warunki są równoważne:*

a) $\forall_{a\in\mathbb{R}}\{x \in A;\ f(x) < a\} \in \mathcal{F};$

b) $\forall_{a\in\mathbb{R}}\{x \in A;\ f(x) \leq a\} \in \mathcal{F};$

c) $\forall_{a\in\mathbb{R}}\{x \in A;\ f(x) > a\} \in \mathcal{F};$

d) $\forall_{a\in\mathbb{R}}\{x \in A;\ f(x) \geq a\} \in \mathcal{F}.$

Definicja 4. *(całki Lebesque'a)*
Niech $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, l)$ będzie przestrzenią z miarą Lebesgue'a. Całkę Lebegue'a po zbiorze A z funkcji $f \in \mathcal{L}$ względem miary l oznaczamy przez $\int\limits_A f dl$ i definiujemy w następujący sposób:

a) jeżeli f jest funkcją prostą tzn. przyjmującą skończoną liczbę skończonych wartości na zbiorze A to:

$$\int\limits_A f dl := a_1 l(A_1) + a_2 l(A_2) + \cdots + a_n l(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_i \cdot l(A_i),$$

gdzie $A_i := f^{-1}(\{a_i\})$;

b) jeżeli f jest nieujemną funkcją mierzalną to:

$$\int\limits_A f dl := \lim_{n\to\infty} \int_A f_n dl,$$

gdzie (f_n) jest dowolnym niemalejącym ciągiem funkcji prostych zbieżnych punktowo w zbiorze A do funkcji f;

c) jeżeli f jest funkcją mierzalną (rownież ujemną) to:

$$\int\limits_A f dl := \int\limits_A f^+ dl - \int\limits_A f^- dl,$$

gdzie $f^+ = \max\{f(x), 0\},\ f^- = \min\{-f(x), 0\}$ oraz $\int_A f^+ dl$ lub $\int_A f^- dl$ jest liczbą skończoną.

Twierdzenie 5. *(całka Riemanna a Lebesgue'a)*
Niech będzie dana ograniczona funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Wówczas:*

a) *jeżeli funkcja* f *jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale* $[a, b]$, *to jest mierzalna i całkowalna w sensie Lebesgue'a na tym przedziale oraz obie całki są równe:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dl(x)$$

b) *funkcja* f *jest całkowalna w sensie Riemana na przedziale* $[a, b]$, *wtedy i tylko wtedy, gdy jej zbiór punktów nieciągłości jest miary Lebesgue'a zero.*

Definicja 6. *(patrz S. Tymowski)*
Jeżeli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, *gdzie* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *jest przedziałem ograniczonym lub nie, jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na kazdym podprzedziale* $[a', b'] \subset (a, b)$ *i istnieje granica*

$$\lim_{\substack{a' \to a^+ \\ b' \to b^-}} \int_{[a',b']} f dl$$

skończona lub nie, to nazywamy ją całką niewłasciwą Lebesque'a funkcji f.

Twierdzenie 7. *Jeżeli funkcja* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, *gdzie* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *jest przedziałem ograniczonym lub nie, jest* **mierzalna** *w sensie Lebesgue'a i istnieje (w* $\overline{\mathbb{R}}$*) całka niewlaściwa Riemana* $\int_a^b f(x)dx$ *to istnieje całka niewłaściwa Lebesgue'a i obie całki są równe.*