Legalna ściąga na kolokwium nr. 1

Uwaga: Zabrania się korzystania z innych materiałów jak również dopisywania dodatkowych informacji.

Wzory na pochodne funkcji uwikłanej $y = y(x)$ **równania** $F(x, y) = 0$:

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$y''(x) = -\frac{F'_{xx}(F'_y)^2 - 2F'_{xy}F'_xF'_y + F'_{yy}(F'_x)^2}{(F'_y)^3}$$

Pochodne funkcji uwikłanej $z = z(x, y)$ **równania** $F(x, y, z) = 0$:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Wybrane wzory całek:

Lp.	Wzór	Uwagi
17.	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + c$	$a \neq 0$
18.	$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + c$	$a \neq 0$
19.	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left\|x + \sqrt{x^2+a}\right\| + c$	$a \in \mathbb{R}$
20.	$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + c$	$a > 0,\ \|x\| \neq a$
23.	$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$	$n \geq 2$
24.	$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx$	$n \geq 2$
25.	$\int \mathrm{tg}^n x dx = \frac{1}{n-1}\mathrm{tg}^{n-1} x - \int \mathrm{tg}^{n-2} x dx$	$n \geq 2$
26.	$\int \mathrm{ctg}^n x dx = \frac{-1}{n-1}\mathrm{ctg}^{n-1} x - \int \mathrm{ctg}^{n-2} x dx$	$n \geq 2$
27.	$\int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\|x + \sqrt{x^2+a}\| + c$	
28.	$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx$	$n \geq 2$
29.	$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{\|a\|} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c$	

Obliczanie całek niewymiernych:

2a. Całkę postaci $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ sprowadzamy do $\int \frac{dx}{\sqrt{a(x-p)^2+q}}$ i dokonujemy podstawienia $x - p = \sqrt{\frac{1}{|a|}}t$.

2b. Całkę postaci $\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$ sprowadzamy do $\int \sqrt{a(x-p)^2+q}dx$ i dokonujemy podstawienia $x-p = \sqrt{\frac{1}{|a|}}t$, a następnie stosujemy wzory ze strony 1

3. Całkę postaci $\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, gdzie $W_n(x)$ jest wielomianem stopnia n, przedstawiamy jako:

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = (A_{n-1}x^{n-1} + \dots A_1x + A_0)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

w celu wyliczenia $A_{n-1}, \dots, A_1, A_0, \lambda$ obustronnie różniczkujemy, mnożymy przez $\sqrt{ax^2+bx+c}$ i otrzymujemy równanie wielomianowe.

4. Całkę postaci $\int P(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ poprzez pomnożeni i podzielenie funkcji podcałkowej przez $\sqrt{ax^2+bx+c}$ przekształcamy do postaci $\int \frac{(ax^2+bx+c)P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Następnie stosujemy algorytm z punktu 3.

5. Całkę postaci $\int \frac{dx}{(x-k)^n\sqrt{dx^2+ex+f}}$ poprzez podstawienie $x - k = \frac{1}{t}$ przekształcamy do postaci $\int \frac{t^{n-1}}{\sqrt{at^2+bt+c}}dt$, a więc całki z podpunktu 3.

6. Całki typu $\int W(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, gdzie W jest funkcją wymierną sprowadzamy najpierw do postaci kanonicznej i stosujemy podstawienia:

a) $\int W(t, \sqrt{A^2-t^2})dt$ stosujemy podstawienie: $t = A\sin w$ lub $t = A\operatorname{tgh} w$;
b) $\int W(t, \sqrt{A^2+t^2})dt$ stosujemy podstawienie: $t = A\operatorname{tg} w$ lub $t = A\sinh w$;
c) $\int W(t, \sqrt{t^2-A^2})dt$ stosujemy podstawienie: $t = \frac{A}{\cos w}$ lub $t = A\cosh w$.

7. Podstawienia Eulera

   a) pierwsze podstawienie Eulera, gdy $a > 0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = -\sqrt{a}x + t$;
   b) drugie podstawienie Eulera, gdy $c > 0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$;
   c) trzecie podstawienie Eulera, gdy wyróżnik $\Delta > 0$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$, gdzie x_1, x_2 to pierwiastki trójmianu ax^2+bx+c.

8. Całki dwumienne: całki postaci $\int x^m(a+bx^n)^p$, gdzie m, n, p są liczbami wymiernymi. Wówczas

   a) gdy p jest liczbą całkowitą, stosujemy podstawienie: $\sqrt[N]{x} = t$, gdzie N jest najmniejszym wspólnym mianownikiem liczb wymiernych m, n;
   b) gdy $\frac{m+1}{n}$ jest liczbą całkowitą, stosujemy podstawienie:q $\sqrt[N]{a+bx^n} = t$, gdzie N jest mianownikiem liczby p;
   c) gdy $\frac{m+1}{n} + p$ jest liczbą całkowitą, stosujemy podstawienie: $\sqrt[N]{\frac{a+bx^n}{x^n}} = t$, gdzie N jest mianownikiem liczby p.

Całkowanie pewnych wyrażeń trygonometrycznych:

1. Całkę $\int W(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x)dx$ obliczmy przez podstawienie $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Wówczas mamy:

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

2. Całkę $\int W(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x\cos x)dx$ obliczmy przez podstawienie $t = \operatorname{tg} x$. Wówczas mamy:

$$dx = \frac{1}{1+t^2}dt, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

3. Całkę postaci $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx,\ n, m \in \mathbb{N}$ liczmy:
   a) gdy $m,\ n$ są parzyste jak podpunkcie 2;
   b) gdy m jest nieparzyste, przez podstawienie $t = \cos x$,
   c) gdy n jest nieparzyste, przez podstawienie $t = \sin x$.

4. Całki postaci $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \cos bx$ obliczmy korzystając ze wzorów:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)],$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)],$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)].$$