Legalna ściąga na kolokwium nr. 1

Uwaga: Zabrania się korzystania z innych materiałów jak również dopisywania dodatkowych informacji.

Fakt 1. *Niech $f : X \to Y$ oraz $A, B \subset X$, wówczas mają miejsce wzory:*

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;

c) $f(A \setminus B) \supset f(A) - f(B)$.

Fakt 2. *Niech $f : X \to Y$ oraz $A, B \subset Y$, wówczas mają miejsce wzory:*

a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;

b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$.

Fakt 3. *Niech $f : X \to Y$ i niech $(A_t)_{t\in T}$ będzie rodziną zbiorow taką, że $A_t \subset X$ oraz $(B_t)_{t\in T}$ będzie rodziną zbiorow taką, że $B_t \subset Y$, wówczas zachodzą wzory:*

a) $f\left(\bigcup\limits_{t\in T} A_t\right) = \bigcup\limits_{t\in T} f(A_t)$;

b) $f\left(\bigcap\limits_{t\in T} A_t\right) \subset \bigcap\limits_{t\in T} f(A_t)$;

c) $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{t\in T} A_t\right) = \bigcup\limits_{t\in T} f^{-1}(A_t)$;

d) $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{t\in T} A_t\right) = \bigcap\limits_{t\in T} f^{-1}(A_t)$.

Twierdzenie 4. *(Własności miary) Niech $(\Omega, \mathcal{F}\mu)$ jest przestrzenią z miarą $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$, wówczas:*

1) $\forall_{A,B\in\mathcal{F}}\ \ A \subset B \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B)$;

2) $\forall_{A,B\in\mathcal{F}}\ \ A \subset B \wedge \mu(A) < +\infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;

3) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *dla każdego ciągu (A_n) zbiorów mierzalnych;*

4) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$ *dla każdego ciągu (A_n) zbiorów mierzalnych miary zero;*

5) $\forall_{A,B\in\mathcal{F}}\ \ \mu(B) = 0 \Rightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(A) = \mu(A \cup B)$;

6) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *dla każdego ciągu zbiorów mierzalnych (A_n) takich, że $\mu(A_i \cap A_j) = 0$, $i \neq j$.*

7) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$ *dla każdego ciągu zbiorów mierzalnych, takiego że $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$;*

8) $\mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$ *dla każdego ciągu zbiorów mierzalnych, takiego że $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ oraz $\mu(A_1) < +\infty$.*

Definicja 1. (funkcja mierzalna)
Niech $\mathcal{F}$ będzie $\sigma-$ ciałem podzbiorów zbioru Ω. Funkcję $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, gdzie $A \subset \Omega$ nazywamy mierzalną ($\sigma-$mierzalną), jeżeli dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ zbiór

$$\{x \in A;\ f(x) < a\} \in \mathcal{F}.$$

Wniosek 5. Mierzalność funkcji f oznacza, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a przeciwobraz $f^{-1}\big((-\infty, a)\big)$ należy do $\sigma-$algebry $\mathcal{F}$.

Twierdzenie 6. *Niech $\mathcal{F}$ będzie $\sigma-$ ciałem podzbiorów zbioru Ω, $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, gdzie $A \subset \Omega$. Następujące warunki są równoważne:*

a) $\forall_{a\in\mathbb{R}}\{x \in A;\ f(x) < a\} \in \mathcal{F}$;

b) $\forall_{a\in\mathbb{R}}\{x \in A;\ f(x) \leq a\} \in \mathcal{F}$;

c) $\forall_{a\in\mathbb{R}}\{x \in A;\ f(x) > a\} \in \mathcal{F}$;

d) $\forall_{a\in\mathbb{R}}\{x \in A;\ f(x) \geq a\} \in \mathcal{F}$.

Twierdzenie 7. *(własności całki)*
W ustalonej przestrzeni z miarą $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ całka względem miary μ posiada następujące własności:

1) jeżeli istnieje całka $\int\limits_A f\,d\mu$ oraz $c \in \mathbb{R}$, to

$$\int\limits_A c\,f\,d\mu = c\int\limits_A f\,d\mu.$$

2) jeżeli funkcje mierzalne $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ są nieujemne lub całkowalne i ich suma jest określona ma zborze A, to

$$\int\limits_A (f+g)\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu + \int\limits_A g\,d\mu.$$

3) jeżeli $B, C \in \mathcal{F}$ oraz $B \cap C = \emptyset$, to

$$\int\limits_{B\cup C} f\,d\mu = \int\limits_B f\,d\mu + \int\limits_C f\,d\mu$$

o ile istnieją całki po prawej lub lewej stronie wzoru.

4) jeżeli istnieją całki $\int\limits_A f\,d\mu$ i $\int\limits_A g\,d\mu$ oraz $f \leq g$, to

$$\int\limits_A f\,d\mu \leq \int\limits_A g\,d\mu.$$

5) jeżeli funkcja $f : A \to [0, +\infty]$ jest mierzalna, $B \subset A$ i $B \in \mathcal{F}$, to

$$\int\limits_B f\,d\mu \leq \int\limits_A f\,d\mu.$$

6) jeżeli funkcja $f : A \cup B \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna, $A, B \in \mathcal{F}$ oraz $\mu(B) = 0$, to

$$\int\limits_{A\cup B} f\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu = \int\limits_{A\setminus B} f\,d\mu.$$

7) jeżeli funkcja $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna i $\mu(A) = 0$, to

$$\int\limits_A f\,d\mu = 0.$$

8) jeżeli funkcja $f : A \to [0, +\infty]$ jest mierzalna, to

$$\int\limits_A f\,d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu(\{x \in A; f(x) \neq 0\}) = 0,$$

czyli f jest równa zero prawie wszędzie.

9) *jeżeli funkcja f jest całkowalna na zbiorze A oraz $B \subset A$ i $B \in \mathcal{F}$, to funkcja f jest całkowalna na zbiorze B.*

10) *jeżeli istnieje całka $\int\limits_A f\,d\mu$, to*

$$\left|\int\limits_A f\,d\mu\right| \leq \int\limits_A |f|\,d\mu$$

(funkcja f jest całkowalna na zbiorze A $\Leftrightarrow$ funkcja $|f|$ jest całkowalna na tym zbiorze.)

11) *jeżeli funkcja $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna, funkcja $g : A \to [0, +\infty]$ jest całkowalna oraz $|f| \leq g$, to funkcja f jest całkowalna.*

12) *funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ mierzalna i ograniczona określona na zbiorze A miary skończonej jest całkowalna oraz*

$$\left|\int\limits_A f\,d\mu\right| \leq \sup_{x\in A} |f(x)| \cdot \mu(A).$$

13) *iloczyn $f \cdot g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ funkcji ograniczonej $f : A \to \mathbb{R}$ i całkowalnej $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ jest funkcją całkowalną.*

14) *jeżeli funkcja $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ jest całkowalna, to*

$$\mu\Big(\{x \in A: \quad f(x) = +\infty \qquad \text{lub} \quad f(x) = -\infty\}\Big) = 0.$$

15) *jeżeli funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, to zbiór $\{x \in A;\ f(x) \neq 0\}$ można przedstawić w postaci przeliczalnej ilości zbiorów miary skończonej.*

16) *jeżeli funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, to*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{A\supset B\in\mathbb{F}} \quad \mu(B) < \delta \quad \Rightarrow \int\limits_B |f(x)|d\mu < \varepsilon.$$

(bezwzględna ciągłość całki względem miary).

Twierdzenie 8. *(tw. Lebegue'a o monotonicznym przechodzeniu pod znakiem całki)*
Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą, niech $A \in \mathcal{F}$. Jeżeli $(f_n) : A \to [0, +\infty]$ jest:

a) *niemalejącym ciągiem nieujemnych (tzn. $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots$) funkcji mierzalnych*

lub

b) *nierosnącym ciągiem (tzn. $f_1(x) \geq f_2(x) \geq f_3(x) \geq \cdots$) funkcji całkowalnych*

oraz

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \;\; \text{dla } x \in A.$$

Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu = \int\limits_A f d\mu.$$

Twierdzenie 9. *(Lebegue'a o zbieżności zmajoryzowanej)*
Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji mierzalnych określonych na zbiorze A. Ponadto istnieje całkowalna na zbiorze A funkcja g taka, że $|f_n| \leq g$ dla każdego naturalnego n. Wówczas granica $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ jest funkcją całkowalną oraz

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu = \int\limits_A \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Twierdzenie 10. *(całka Riemanna a Lebesgue'a)*
Niech będzie dana ograniczona funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Wówczas:

a) *jeżeli funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$, to jest mierzalna i całkowalna w sensie Lebesgue'a na tym przedziale oraz obie całki są równe:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dl(x)$$

b) *funkcja f jest całkowalna w sensie Riemana na przedziale $[a, b]$, wtedy i tylko wtedy, gdy jej zbiór punktów nieciągłości jest miary Lebesgue'a zero.*

Twierdzenie 11. *Jeżeli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, gdzie $(a, b) \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem ograniczonym lub nie, jest* **mierzalna** *w sensie Lebesgue'a i istnieje (w $\overline{\mathbb{R}}$) całka niewłaściwa Riemana $\int_a^b f(x)dx$ to istnieje całka niewłaściwa Lebesgue'a i obie całki są równe.*

Twierdzenie 12. *(całkowanie szeregów nieujemnych wyraz za wyrazem)*
Jeżeli (f_n) jest ciągiem nieujemnych funkcji mierzalnych określonych na zbiorze A, to

$$\int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n d\mu.$$

Twierdzenie 13. *(o całkowaniu szeregów)*
Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji całkowalnych na zbiorze mierzalnym A. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} \int_A |f_n| d\mu < \infty$, to funkcja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest całkowalna oraz

$$\int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n d\mu.$$

Twierdzenie 14. *(o przeliczalnej addytywności względem dziedziny całkowania)*
Dla każdego ciągu (f_n) parami rozłącznych zbiorów mierzalnych A_n zachodzi:

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f_n d\mu$$

o ile całka z lewej strony wzoru istnieje.

Twierdzenie 15. *(całkowanie przez podstawienie)*
Niech $\varphi : U \to V$ będzie dyfeomorfizmem (odwzorowanie różnowartościowe, nieosobliwe klasy C^1, takie, że φ^{-1} jest ciągłe), gdzie $U, V \subset \mathbb{R}^n$, $U-$zbiór otwarty. Ponadto, niech będzie dana funkcja f określona na zbiorze $\varphi(U)$. Wówczas:

a) *funkcja f jest całkowalna na zbiorze $\varphi(U)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f(\varphi(t))\mathcal{J}(\varphi)$,*

b) *jeżeli funkcja f jest mierzalna i nieujemna lub całkowalna na $\varphi(U)$, to zachodzi tzw. wzór na całkowanie przez podstawienie:*

$$\int_{\varphi(U)=V} f(x)dx = \int_U f\big(\varphi(t)\big)\big|\mathcal{J}(\varphi(t))\big|dt \ \text{ (w sensie Lebegue'a)},$$

gdzie $\mathcal{J}(\varphi)$ oznacza jakobian przekształcenia φ.