Funkcje wielu zmiennych

Informacje pomocnicze

Definicja 1. Niech funkcja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie klasy $C^p(D)$. Drugą,..., n-tą różniczkę funkcji f w punkcie (x,y) będziemy oznaczać poprzez $d^2f(x,y)(dx,dy),...,d^nf(x,y)(dx,dy)$ i definiować wzorami:

$$d^2f(x,y)(dx,dy) = d\Big(df(x,y)(dx,dy)\Big),...,d^nf(x,y)(dx,dy) = d\Big(d^{n-1}f(x,y)(dx,dy)\Big).$$

Zatem :

$$d^2f(x,y)(dx,dy) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)(dy)^2$$

oraz

$$d^nf(x,y)(dx,dy) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x,y)(dx)^k(dy)^{n-k}. \tag{1}$$

Twierdzenie 2. *(wzór Taylora z resztą Lagrange'a)*
Niech $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gdzie D jest obszarem zawierającym odcinek o końcach $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$. Jeśli funkcja $f \in C^n(D)$, to istnieje $\theta \in (0,1)$ taka, że

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)(h_1,h_2) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)(h_1,h_2) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}f(x_0,y_0)(h_1,h_2) + \frac{1}{n!}d^nf(x_0+\theta h_1, y_0+\theta h_2)(h_1,h_2),$$

Twierdzenie 3. *(kryterium Sylwestera)*
Niech $d^2f(x)(h) = \sum\limits_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)h_ih_j$, będzie forma kwadratową. Rozważmy macierz:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_0) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(x_0) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k}(x_0) \end{bmatrix}.$$

Wówczas forma $d^2f(x_0)(h)$ jest:

- *dodatnio określona jeżeli wszystkie minory główne A_i, $i = 1,2,...,k$ macierzy A są dodatnie.*
- *ujemnie określona jeżeli minory główne spełniają warunki $A_1 < 0$, $A_2 > 0$, $A_3 < 0, A_4 > 0, ...$*
- *nieokreślona w pozostałych przypadkach.*

Algorytm wyznaczania ekstremów globalnych (absolutnych) funkcji dwóch zmiennych w obszarze domkniętym:

1. Wyznaczamy punkty krytyczne na istnienie ekstremów lokalnych wewnątrz obszaru otwartego;

2. Wyznaczamy szukamy punktów, w których funkcja może mieć ekstrema warunkowe. W tym celu składamy funkcję dwóch zmiennych z funkcją określającą brzeg obszaru (brzeg należy podzielić na sumę części, które można opisać równaniami $y = \varphi(x)$ lub $x = \psi(y)$).

3. Porównujemy wartości funkcji w powyższych punktach i ustalamy wartość najmniejszą i największą w tym obszarze domkniętym.

Twierdzenie 4. *(metoda mnożników Lagrange'a)*
Niech $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Jeżeli funkcja $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ przy k (gdzie $k < n$) warunkach postaci:

$$g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \qquad g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \qquad ... \qquad g_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \tag{2}$$

posiada w punkcie $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ekstremum lokalne, to istnieją takie mnożniki $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$, że

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_2}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases}$$

Algorytm wyznaczania ekstremów warunkowych
Niech $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Chcąc wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ przy k warunkach postaci (2) należy szukać punktów $x_1, x_2, ..., x_n$, w których mogą istnieć ekstrema lokalne funkcji:

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) := f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + \lambda_k g_k(x_1, x_2, ..., x_n),$$

gdzie $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ są czynnikami (mnożnikami) stałymi. W tym celu z układu $n + k$ równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \vdots \\ g_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

z $n + k$ niewiadomymi $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_k$ wyznaczamy $x_1, x_2, ..., x_n$.

Twierdzenie 5. *(twierdzenie o funkcji uwikłanej)*
Niech funkcja $F(x, y)$ będzie określona na otoczeniu punktu (x_0, y_0). Ponadto niech na otoczeniu tego punktu posiada ciągłe pochodne cząstkowe $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ oraz

$$F(x_0, y_0) = 0 \qquad i \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Wówczas:
a) w pewnym otoczeniu punktu x_0 istnieje dokładnie jedna funkcja $y = y(x)$ spełniająca warunki $y_0 = y(x_0)$ i $F(x, y) = 0$ dla każdego x z tego otoczenia;

b) funkcja $y = y(x)$ jest ciągła w pewnym otoczeniu punktu x_0 i ma w nim ciągłą pochodną daną wzorem:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Uwaga 6. Dla funkcji uwikłanej trzech zmiennych $F(x, y, z)$ o ile funkcja F jest ciągła, posiada ciągłe pochodne cząstkowe $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ oraz

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

to w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) funkcja $z = z(x, y)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu, które wyrażają się wzorami

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Zadania

1. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x,y) = x^2y(2-x-y)$ w trójkącie domkniętym ograniczonym prostymi $x=0,\ y=0,\ x+y=6$.
2. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x,y) = x^2y$ w obszarze domkniętym ograniczonym krzywymi $y = e^{2x},\ y = e^{-x},\ y = e^{x-2}$.
3. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2$ w kole $x^2 + y^2 \leq 1$.
4. Wyznacz ekstrema warunkowe funkcji:
   a) $f(x,y) = y^2 - x^2$ przy warunku $\frac{1}{9}x^2 + y^2 = 1$;
   b) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ przy warunku $x + y = 1$.
5. Wyznacz odległość punktu $(-1,5,0)$ od krzywej opisanej układem $\begin{cases} x = y^2 \\ x + z = 1. \end{cases}$
6. Znajdź pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem:
   a) $x^3y - xy^3 = 4$; b) $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.
7. Znajdź $y'(0)$, $y''(0)$ wiedząc, że $y = y(x)$ jest funkcją uwikłaną zadaną równaniem $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$ o ile $y(0) = 1$.
8. Znajdź pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0$ dla $x_0 = 1$.
9. Wyznacz ekstrema funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem:
   a) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$; b) $x^2y^2 - x^4 + y^4 - 5 = 0$; c) $x^2 - 4x + y^2 = 5$.
10. Wyznacz ekstrema funkcji uwikłanej $z = z(x,y)$ określonej równaniem $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.
11. Napisz wzór Taylora z resztą Lagrange'a dla:
    a) $f(x,y) = \sin^2(x+y)$, $(x_0,y_0) = (\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$, $n = 2$;
    b) $f(x,y) = e^{x+2y}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$, $n = 3$;
    c) $f(x,y) = (x+y)^3$, $(x_0,y_0) = (-1,1)$, $n = 4$.
12. Rozwiń dane funkcje w szereg Maclaurina:
    a) $f(x,y) = (1+x)^2(1+y^3)$; b) $f(x,y) = 2x^3 + y^2 + x^2y$.