Ogólna teoria miary i całki: 1. $\sigma-$ciało i miara

Zadania

1. Czy istnieje $\sigma-$ciało ($\sigma-$ algebra) składające się z 1, 2, 3, 4 podzbiorów danego zbioru Ω?

2. Podać wszystkie $\sigma-$ciała dla zbioru $\Omega = \{a, b, c\}$. Ile można skonstruować $\sigma-$ciał w $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$?

3. Sprawdzić, czy następujące rodziny są $\sigma-$ ciałami:

   a) $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$: rodzina wszystkich podzbiorów zbioru Ω;

   b) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$;

   c) $\mathcal{F} = \big\{A \in 2^{\Omega};\ A \text{ lub } \Omega \setminus A \text{ jest zbiorem przeliczalnym}\big\}$, gdzie Ω jest zbiorem nieprzeliczalnym;

   d) Niech $\Omega = \{0, 2, 4, 6, 13\}$ czy $\sigma-$ciałami sa rodziny $\mathcal{F}_1 = \big\{\emptyset, \Omega, \{2, 4, 13\}, \{0, 6\}\big\}$, $\mathcal{F}_2 = \big\{\emptyset, \Omega, \{2, 4\}, \{13\}, \{0, 6\}\big\}$,

4. Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $\mathcal{C}_1 = \{\{1\}, \{2\}\}$, $\mathcal{C}_2 = \{\{1\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}\}$. Wyznacz $\sigma(\mathcal{C}_1)$, $\sigma(\mathcal{C}_2)$.

5. Niech $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$ oraz $\mathcal{C} = \{\{0\}, \{3\}, \{7\}, \{0, 9\}, \{1, 2, 8\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{5, 6, 7, 8\}\}$. Wykaż, że $\sigma(\mathcal{C}) = 2^{\Omega}$.

6. Niech Ω będzie zbiorem nieskończonym. Sprawdzić, że rodzina $\big\{A \in 2^{\Omega};\ A \text{ lub } \Omega \setminus A \text{ jest zbiorem skończonym}\big\}$, nie jest $\sigma-$ciałem.

7. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją ciągła oraz $\mathcal{F}_x$ to σ ciało X, a $\mathcal{F}_y$ to σ ciało Y. Czy $\mathcal{F} = \big\{A \subset X;\ \exists_{B \in \mathcal{F}_y} A = f^{-1}(B)\big\}$ jest σ ciałem?

8. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją "na" oraz $\mathcal{F} = \{B \subset Y;\ \exists_{A \in \mathcal{F}_x}\ B = f(A)\}$, gdzie $\mathcal{F}_x$ to σ ciało X. Wykazać, że $\mathcal{F}$ nie jest σ ciałem (podać kontr-przykład).

9. Niech $\mathcal{F} := \{B \subset Y, f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X\}$ oraz $\mu(B) = \mu_X(f^{-1}(B))$ dla każdego $B \in \mathcal{F}$. Czy trójka $(Y, \mathcal{F}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą?

10. Sprawdź, czy następujące trójki $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ są przestrzeniami z miarą, a jeżeli tak to czy miara μ jest zupełna:

    a) Ω jest zbiorem conajmniej dwupunktowym, $\mathcal{F} := 2^{\Omega}$ oraz $\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } A = \emptyset, \\ +\infty, & \text{jeżeli } A \neq \emptyset; \end{cases}$

    b) Ω jest dowolnym zbiorem,$\mathcal{F} := 2^{\Omega}$ oraz $\mu(A) := \begin{cases} \bar{A}, & \text{jeżeli zbiór } A \text{ jest skończony}, \\ +\infty, & \text{jeżeli zbiór } A \text{ jest nieskończony}; \end{cases}$

    c) Ω jest dowolnym zbiorem, $\mathcal{F} := \{\emptyset, \Omega\}$ oraz $\mu(\emptyset) := 0,\ \mu(\Omega) = 0$;

    d) Ω jest zbiorem nieprzeliczalnym, $\mathcal{F} \big\{A \in 2^{\Omega};\ A \text{ lub } \Omega \setminus A \text{ jest zbiorem przeliczalnym}\big\}$ oraz
    $$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } A \text{ jest zbiorem przeliczalnym}, \\ 1, & \text{jeżeli } \Omega \setminus A \text{ jest zbiorem przeliczalnym} \end{cases}$$

e) $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ oraz $\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } A \text{ jest zbiorem skończonym,} \\ +\infty, & \text{jeżeli } A \text{ jest zbiorem nieskończonym.} \end{cases}$

11. Niech $\Omega = \mathbb{R}$ oraz $c \in \mathbb{R}$. Określmy funkcję $\delta_c : 2^\Omega \to [0, +\infty]$ w sposób następujący:

$$\delta_c(A) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli} \quad c \in A; \\ 0 & \text{jeżeli} \quad c \notin A. \end{cases}$$

Czy wówczas funkcja zbioru $\mu : 2^\Omega \to [0, +\infty]$ zadana wzorem $\mu(A) = 2 \cdot \delta_{-3} + 4 \cdot \delta_5$ jest miarą?

12. Niech μ będzie miarą skończoną określoną na $\sigma-$ciele generowanycm przez przedziały $(-\infty, a]$ gdzie $a \in \mathbb{Q}_+$ taką, że $\mu((-\infty, a]) = a^2$. Oblicz $\mu([1, \sqrt{2}])$.

13. Określmy miarę μ na zbiorach $B(\mathbb{R}^2)$, w taki sposób, że $\mu(P) =$pole$P$, gdzie P to prostokąt o wierzchołkach wymiernych. Wykaż, że $\mu(l) = 0$, gdzie l to prosta o równaniu $y = 0$.

14. Niech Ω będzie zbiorem nieprzeliczalnym, a $\mu^* : 2^\Omega \to \mathbb{R}$ funkcją zbioru daną wzorem:

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli zbiór } A \text{ jest przeliczalny} \\ \frac{1}{2}, & \text{jeżeli zbiory } A \text{ i } \Omega \setminus A \text{ są nieprzeliczalne} \\ 1, & \text{jeżeli zbiór } A \text{ jest nieprzeliczalny i zbiór } \Omega \setminus A \text{ jest przeliczalny.} \end{cases}$$

Wykaż, że μ^* jest miarą zewnętrzną, która nie jest miarą.

Informacje pomocnicze

Fakt 1. *Niech $f : X \to Y$ oraz $A, B \subset X$, wówczas mają miejsce wzory:*

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;

c) $f(A \setminus B) \supset f(A) - f(B)$.

Fakt 2. *Niech $f : X \to Y$ oraz $A, B \subset Y$, wówczas mają miejsce wzory:*

a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;

b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$.

Fakt 3. *Niech $f : X \to Y$ i niech $(A_t)_{t\in T}$ będzie rodziną zbiorow taką, że $A_t \subset X$ oraz $(B_t)_{t\in T}$ będzie rodziną zbiorow taką, że $B_t \subset Y$, wówczas zachodzą wzory:*

a) $f\left(\bigcup\limits_{t\in T} A_t\right) = \bigcup\limits_{t\in T} f(A_t)$;

b) $f\left(\bigcap\limits_{t\in T} A_t\right) \subset \bigcap\limits_{t\in T} f(A_t)$;

c) $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{t\in T} A_t\right) = \bigcup\limits_{t\in T} f^{-1}(A_t)$;

d) $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{t\in T} A_t\right) = \bigcap\limits_{t\in T} f^{-1}(A_t)$.

Definicja 4. *Funkcję zbioru $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ określoną na $\sigma-$ciele podzbiorów zbioru Ω nazywamy miarą, jeżeli:*

1) $\mu(\emptyset) = 0$;

2) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, *gdzie* $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ *oraz* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *dla* $i \neq j$.

Twierdzenie 5. *(Własności miary)* *Niech (Ω, μ) jest przzestrzenią z miarą $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$, wówczas:*

a) $\forall_{A,B\in\mathcal{F}}\ A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$;

b) $\forall_{A,B\in\mathcal{F}}\ A \subset B \wedge \mu(A) < +\infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;

c) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *dla każdego ciągu* (A_n) *zbiorów mierzalnych;*

d) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$ *dla każdego ciągu* (A_n) *zbiorów mierzalnych miary zero;*

e) $\forall_{A,B\in\mathcal{F}}\ \ \mu(B)=0 \Rightarrow \mu(A\setminus B)=\mu(A)=\mu(A\cup B)$;

f) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ *dla każdego cigu zbiorów mierzalnyc* (A_n) *takich, że* $\mu(A_i\cap A_j)=0$, $i\neq j$.

g) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)$ *dla każdego ciągu zbiorów mierzalnych, takiego że* $A_1\subset A_2\subset ...$;

h) $\mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)$ *dla każdego ciągu zbiorów mierzalnych, takiego że* $A_1\supset A_2\supset ...$ *oraz* $\mu(A_1)<+\infty$.

Literatura:

1) Sławomir Tymowski, *Kurs analizy matematycznej*, WSP, Osztyn 1997.

2) Wiesława J. Kaczor, Maria T. Nowak, *Zadania z analizy matematycznej 3*, PWN, Warszawa 2006.

3) T Radożycki, *Rozwiązujemy zadania z analizy matematycznej, część III*, Wydawnictwo Oświatowe FOSZE, 2015.