Całka powierzchniowa

1. Oblicz podane całki powierzchniowe niezorientowane:
   a) $\iint\limits_S (z^2 - 4x^2 - 4y^2)dS$, gdzie S to część płaszczyzny $z = 1 + 2x + 2y$ dla $x \in [0, 2]$ i $y \in [0, 2]$;
   b) $\iint\limits_S (2y^2 + z)dS$, gdzie S to część powierzchni $z = x^2 - y^2$ spełniająca warunek $x^2 + y^2 \leq 1$;
   c) $\iint\limits_S zdS$, gdzie S to część sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ spełniająca warunek $z \geq x^2 + y^2$;
   d) $\iint\limits_S (2x + 1)dS$, gdzie S to część walca $x = \sqrt{4 - y^2}$ dla $z \in [0, 1]$;
   e) $\iint\limits_S x^2\sqrt{1 + 2z}dS$, gdzie S to powierzchnia dana wzorem $z = \frac{1}{2}y^2$, jeżeli $|x| + |y| \leq 2$.
   f) $\iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}dS$, gdzie S to część powierzchni stożka $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}z^2$ dla $z \in [0, 2]$ (łącznie z "podstawą")
   g) $\iint\limits_S (y+z+\sqrt{a^2 - x^2})dS$, gdzie S to część powierzchni bocznej walca $x^2+y^2 = a^2$ dla $z \in [0, 4]$ oraz $a > 0$;
   h) $\iint\limits_S (xy + yz + xz)dS$, gdzie S to część powierzchni bocznej stożka $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ wyciętej walcem $x^2 + y^2 = 4x$;
   i) $\iint\limits_S z^2dS$, gdzie S to jest określona równaniami $x = 3\cos\varphi\cos\omega$, $y = 3\sin\varphi\cos\omega$, $z = 3\sin\omega$ dla $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$;

2. Oblicz pole powierzchni S :
   a) wyciętej walcem $x^2 + y^2 = R^2$ z powierzchni $z = x^2 - y^2$;
   b) paraboloidy $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ograniczonej płaszczyznami $x = 0$ i $z = 2$ (dla $x \geq 0$);
   c) określonej równaniami $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $x = 4\varphi$, gdzie $0 \leq r \leq 3$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

3. Oblicz masę paraboloidy obrotowej danej wzorem $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ zawartej między płaszczyznami $z = 0$ i $z = 1$, jeżeli w każdym jej punkcie jej gęstość równa się trzeciej współrzędnej punktu powierzchni.

4. Oblicz całkowity ładunek elektryczny rozmieszczony na powierzchni $z = \sqrt{4 - x^2}$, gdzie $0 \leq x \leq 1$ oraz $0 \leq y \leq 1$, jeżeli gęstość ładunku w punkcie (x, y, z) jest dana wzorem $x + y + z$.

5. Oblicz podane całki powierzchniowe zorientowane:
   a) $\iint\limits_S xdydz$, gdzie S to dodatnia strona powierzchni $x = 3 - y - z$ o ile $0 \leq y \leq 3$ oraz $0 \leq z \leq 3 - y$;
   b) $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$, gdzie S to zewnętrzna strona dolnej połowy powierzchni $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;
   c) $\iint\limits_S x^2zdydz+xyzdzdx+(x^2+yz^2)dxdy$, gdzie S to zewnętrzna strona powierzchni $x^2+z^2 = 4$ dla $z \leq 0$ oraz $y \in [0, 3]$;
   d) $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni bocznej stożka $x^2 + y^2 = z^2$ dla $0 \leq z \leq 2$;
   e) $\iint\limits_S zdzdx + (x + y)dxdy$, gdzie S to powierzchnia określona parametrycznie $x(u, v) = u$, $y(u, v) = u - v$, $z(u, v) = 2u + v$, dla $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$;
   f) $\iint\limits_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$, gdzie S to powierzchnia określona parametrycznie $x(u, v) = v\cos u$, $y(u, v) = v\sin u$, $z(u, v) = v$, dla $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$;

6. Korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego oblicz podane całki powierzchniowe:
   a) $\iint\limits_S 4x^3dydz + 4y^3dzdx - 6z^4dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną bryły ograniczonej przez $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $z = 4$;
   b) $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, gdzie S to zewnętrzna strona powierzchnia złożonej ze stożka $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ oraz płaszczyzny $z = 2$;
   c) $\iint\limits_S xdydz - y^2dzdx + (x^2 + z^2 - 1)dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną elipsoidy obrotowej $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$;
   d) $\iint\limits_S (z^2 + y^2)dydz + xzdzdx + (y^2 - x^2)dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną paraboloidy obrotowej $z = x^2 + y^2 - 4$ znajdującej się poniżej płaszczyzny Oxy.

7. Korzystając z twierdzenia Stokesa oblicz podane całki krzywoliniowe:
   a) $\int\limits_K xdx + xzdy + zdz$, gdzie K to dodatnio zorientowany okrąg o równaniach $K : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 2; \end{cases}$
   b) $\int\limits_K (x - 2z)dx + (x + 3y + z)dy + (1 + y)dz$, gdzie K to dodatnio zorientowana krawędź trójkąta o wierzchołkach $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$;
   c) $\int\limits_K y^2dx - x^2dy + z^2dz$, gdzie K to dodatnio zorientowana krawędź przecięcia powierzchni $z = 1 - x^2 - y^2$ z płaszczyznami układu współrzędnych dla $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$.

8. Udowodnij, że objętość bryły ograniczonej zamkniętą powierzchnią gładką S, która jest zorientowana dodatnio może być wyrażona wzorem:

$$V = \frac{1}{3} \iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy.$$

9. Niech pole wektorowe $\vec{W} = [P, Q, R]$ oraz funkcja u będą określone na pewnym obszarze $V \subset \mathbb{R}^3$ oraz takie, żeby poniższe wyrażenia miały sens. Wykaż, że:

   a) jeżeli $\vec{W}$ =grad$F(x, y, z)$ to div(grad$F$)= $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$;
   b) div(rot$\vec{W}$)= 0,
   c) rot(grad$F$)= $\vec{0}$;
   d) rot($F \cdot \vec{W}$)=grad$F \times \vec{W} + F \cdot$rot$\vec{W}$,
   e) div($F \cdot \vec{W}$)=grad$F \circ \vec{W} + F \cdot$div$\vec{W}$,

   gdzie $\cdot$ oznacza zwykłe mnożenie, a symbole $\times, \circ$ to odpowiednio iloczyn wektorowy i iloczyn skalarny.