Całka krzywoliniowa

1. Oblicz całki krzywoliniowe niezorientowane:
   a) $\int\limits_K \frac{1}{x-y} ds$, gdzie K: $y = \frac{1}{2}x - 2$ dla $0 \le x \le 4$;
   b) $\int\limits_K (y-x) ds$, gdzie K: $y = x^3$ dla $1 \le x \le 2$;
   c) $\int\limits_K xy ds$, gdzie K to brzeg prostokąta o wierzchołkach $(0,0),\ (4,0),\ (4,2),\ (0,2)$;
   d) $\int\limits_K x^2 y ds$, gdzie K to brzeg łuk okręgu $x^2+y^2 = 16$ leżący w drugiej ćwiartce okręgu;
   e) $\int\limits_K (x+y) ds$, gdzie K to brzeg trójkąta o wierzchołkach $A = (0,0),\ B = (0,1),\ C = (0,1)$;
   f) $\int\limits_K y^2 ds$, gdzie K jest łukiem cykloidy: $x(t) = t - \sin t,\ \ y(t) = 1 - \cos t$ dla $t \in [0, 2\pi]$;
   g) $\int\limits_K |y| ds$, gdzie K: $x(t) = \cos t,\ \ y(t) = \sin t$ dla $t \in [0, 2\pi]$;
   h) $\int\limits_K \sqrt{x^2+y^2} ds$, gdzie K: $x(t) = \cos t + t \sin t,\ \ y(t) = \sin t - t\cos t$ dla $t \in [0, 2\pi]$;
   i) $\int\limits_K 2xyz ds$, gdzie K: $x(t) = \cos t,\ \ y(t) = \sin t,\ z(t) = 3t$ dla $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$.

2. Korzystając z interpretacji geometrycznej całki krzywoliniowej oblicz długość łuku krzywej:
   a) półokręgu $x^2+y^2 = 9$ dla $x \ge 0$;
   b) $y = \ln x$ dla $x \in [2,5]$;
   c) kardioidy o równaniu $r(\omega) = 1 + \cos\omega$ dla $\omega \in [-\pi, \pi]$.

3. Korzystając z interpretacji geometrycznej całki krzywoliniowej oblicz pole powierzchni walcowej utworzonej przez:
   a) walec $x^2+y^2 = 1$ ograniczony płaszczyznami $z = -x$ i $z = 5 + y$;
   b) elipsę $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ w płaszczyźnie Oxy oraz płaszczyznę $z = y$ dla $y \ge 0$.

4. Oblicz masę krzywej $y = \ln x$ dla $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$ o gęstości liniowej $\varrho(x,y) = x^2$.

5. Oblicz całkę krzywoliniową $\int\limits_K 2xy dx - x^2 dy$, gdzie $K = AB$ od punktu $A = (0,0)$ do punktu $B = (2,1)$, gdzie K to:
   a) odcinek prostej;
   b) łuk paraboli $y = \frac{1}{4}x^2$;
   c) łuk paraboli $x = 2y^2$;
   d) to łamana ACB, gdzie $C = (2,0)$.

6. Oblicz całki zorientowane:
   a) $\int\limits_K x dy - y dx$, gdzie $K: x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t$ dla $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$;
   b) $\int\limits_K x^2 dx + 2xy dy$, gdzie K to górny łuk elipsy $9x^2 + 4y^2 = 36$ skierowany dodatnio;
   c) $\int\limits_K \frac{y dx - x dy}{x^2+y^2}$, gdzie K jest skierowanym ujemnie okręgiem $x^2+y^2 = R^2$;
   d) $\int\limits_K xy dx - x^2 dy$, gdzie K to łuk hiperboli $y = \frac{1}{x}$ dla $x \in [1,4]$;
   e) $\int\limits_K (x^2+y^2) dx - xy dy$, gdzie $K: x(t) = t,\ y(t) = e^t$ dla $t \in [0,1]$;
   f) $\int\limits_K (2a - y) dx - (a-y) dy$, gdzie K to łuk cykloidy $x(t) = a(t - \sin t),\ y(t) = a(1 - \cos t)$ dla $t \in [0, 2\pi]$;
   g) $\int\limits_K 2x(y-1) dx + x^2 dy$, gdzie K kontur figury ograniczonej liniami $y = x^2,\ y = 9$ obiegający figurę przeciwnie do ruchu wskazówek zegara;
   h) $\int\limits_K x dx + y dy + z dz$, gdzie $K: x(t) = 2t,\ y(t) = t^2,\ z = 1 - t$ dla $t \in [0,1]$.

7. Oblicz pole obszaru ograniczonego:
   a) krzywą $K: \ x(t) = a\cos^3 t,\ y(t) = a\sin^3 t$, gdzie $a > 0$ oraz $t \in [0, 2\pi]$;
   b) parabolą $y = x^2$ i prostą $y = 1$.

8. Korzystając z twierdzenia Greena oblicz całki:
   a) $\oint\limits_K (x+y)dx - (x^2+y^2)dy$, gdzie K jest brzegiem trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (1,1),\ B = (3,2),\ C = (2,3)$ zorientowanym dodatnio;
   b) $\oint\limits_K xydx + xdy$, gdzie K to zorientowany ujemnie brzeg elipsy $4x^2 + 2y^2 = 2$;
   c) $\oint\limits_K (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, gdzie K to zorientowany dodatnio okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 2x$;
   d) $\oint\limits_K e^x(1 - \cos y)dx - e^x(1 - \sin y)dy$, gdzie K jest zorientowanym dodatnio brzegiem figury ograniczonej przez $y = \sin x,\ y = 0$ dla $x \in [0, \pi]$;
   e) $\oint\limits_K y^3dx - x^3dy$, gdzie K jest zorientowanym dodatnio brzegiem pierścienia ograniczonym przez $x^2 + y^2 = 1$ oraz $x^2 + y^2 = 4$.

9. Sprawdź czy całki po krzywej zamkniętej K są równe zero:
   a) $\oint\limits_K 2xydx + x^2dy$;
   b) $\oint\limits_K \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$, gdzie punkt $(0,0)$nie należy do krzywej K.

10. Oblicz pracę pola siły $\vec{F} = [x^3 + y^3, xy]$ wzdłuż paraboli $y = x^2$ wykonana od punktu $A = (0,0)$ do punktu $B = (2,4)$.

11. Niech $A = (0,0),\ B = (4,0)$. Nie korzystając z warunku $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ wykaż, że całka $\int\limits_{AB} xdy - ydx$ zależy od drogi całkowania.

12. Oblicz całkę krzywoliniową $\int\limits_A^B y^2dx + 2xdy$, gdzie $A = (-1,1),\ B = (1,1)$ całkując po:
    a) po odcinku AB;
    b) po dolnym półokręgu $x^2 + (y-1)^2 = 1$;
    A następnie sprawdź czy jej wartość zależy od drogi całkowania.

13. Znajdź funkcję $F(x,y)$ (o ile istnieje), której różniczką zupełną jest wyrażenie:
    a) $(4x^3y^3 - 3y^2 + 5)dx + (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy$;
    b) $[(x + y + 1)e^x - e^y]dx + [e^x - (x + y + 1)e^y]dy$;
    c) $(3x^2 + 2x\sin\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y})dx - \frac{x^3}{y^2}\cos\frac{x}{y}dy$;
    d) $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right)dy$;
    e) $[\cos(x + y^2) + 3y]dx + [2y\cos(x + y^2) + 3x]dy$;
    f) $\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx + \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right)dy$;
    g) $yzdx + (xz + z)dy + (xy + y + 2z)dz$.

14. Udowodnij, że wyrażenie podcałkowe jest różniczką zupełną pewnej funkcji, a następnie oblicz całkę:
    a) $\int\limits_{AB} xy^2dx + yx^2dy$, gdzie $A = (2, 0),\ B = (0, 2)$;
    b) $\int\limits_{AB} (x + \ln y)dx + (\frac{x}{y} + \sin y)dy$, gdzie $A = (1, 1),\ B = (0, \pi)$;
    c) $\int\limits_{AB} (3x^2 - 3yz)dx + (3y^2 - 3xz)dy + (3z^2 - 3xy)dz$, gdzie $A = (1, -2, 1),\ B = (3, 1, -2)$.

15. Udowodnij, całka nie zależy od drogi całkowania, a następnie oblicz ją:
    a) $\int\limits_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx + ydy$;
    b) $\int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, gdzie droga całkowania nie zawiera punktu $(0, 0)$;
    c) $\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right) dy$, gdzie droga całkowania nie przecina osi Oy;
    d) $\int\limits_{(1,1,2)}^{(2,3,5)} (x^3 - 5yz)dx + (y^3 - 5xz)dy + (z^3 - 5xy)dz$.