Całka potrójna

1. Oblicz całki iterowane:
   a) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{2} (4y - z) dz$;
   b) $\int\limits_{0}^{1} dz \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dy \int\limits_{0}^{2} x \cos y dx$;
   c) $\int\limits_{0}^{2} \left(\int\limits_{0}^{1} \left(\int\limits_{0}^{3} (1 - 4x + 6y^2) dz \right) dx \right) dy$;
   d) $\int\limits_{0}^{1} dz \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{0}^{1} zxe^{xy} dy$.

2. Oblicz całki potrójne po wskazanych prostopadłościanach V:
   a) $\iiint\limits_{V} xy^2 z dxdydz$, gdzie $V = [0;1] \times [-1;1] \times [1;3]$;
   b) $\iiint\limits_{V} \frac{x}{yz} dxdydz$, gdzie $P = [1;2] \times [1;e] \times [1;e]$;
   c) $\iiint\limits_{V} \sin x \sin(x+y) \sin(x+y+z) dxdydz$, gdzie $V = [0;\pi] \times [0;\pi] \times [0;\pi]$;
   d) $\iiint\limits_{V} \frac{1}{\sqrt{x+y+z+1}} dxdydz$, gdzie $V = [0;1] \times [0;2] \times [0;3]$.

3. Podane całki podwójne zamień na sumy iloczynów całek pojedynczych:
   a) $\iiint\limits_{V} z \ln(x^y y^x) dxdydz$, gdzie $V = [1;e] \times [1;e] \times [0;1]$;
   b) $\iiint\limits_{V} \frac{x \ln^2 \sqrt[y]{x}}{\cos z} dxdydz$, gdzie $V = [1,e] \times [1,2] \times [-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$.

4. Oblicz całki potrójne:
   a) $\int\limits_{1}^{\pi} dx \int\limits_{0}^{x} dy \int\limits_{0}^{x+y} \cos(y+z) dz$;
   b) $\int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int\limits_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} zdz \right) dy \right) dx$.

5. Zamień kolejność całkowania:
   a) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y) dz$;
   b) $\int\limits_{0}^{1} \left(\int\limits_{0}^{1-y} \left(\int\limits_{0}^{y+z} f(x,y,z) dx \right) dz \right) dy$.

6. Wskazane obszary, lub obszary ograniczone podanymi powierzchniami, opisać jako obszary normalne względem wskazanej płaszczyzny:
   a) walec $x^2 + y^2 \leq 9,\ -2 \leq z \leq 4$, względem Oxz;
   b) $y = x^2,\ x = y^2,\ z = xy,\ z = 0$ względem Oxy;
   c) paraboloidę obrotową $x^2 + y^2 \leq z \leq 5$ względem Oyz;
   d) $y = x^2 + z^2,\ y = 8 - x^2 - z^2$ względem Oxz.

7. Zamień całkę potrójną $\iiint\limits_{G} f(x,y,z) dxdydz$ na całki iterowane, jeśli G jest obszarem ograniczonym poprzez:
   a) $x^2 + y^2 = 9,\ \ z = -3,\ z = 2$;
   b) $x^2 + y^2 + z^2 = 25,\ \ z = 3$ dla $z \geq 3$;
   c) $x = y^2 + z^2,\ \ x = 18 - y^2 - z^2$;
   d) $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ \ z = 5$.

8. Oblicz całki potrójne po wskazanych obszarach G :
   a) $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{(2+x+y+z)^2}$, gdzie G to obszar ograniczony przez $x=0,\ y=0,\ z=0;\ x+y+z+1=0;$
   b) $\iiint\limits_G ydxdydz$, gdzie G to obszar ograniczony przez $z=y,\ z=0;\ \ y=1-x^2;$
   c) $\iiint\limits_G 12xyzdxdydz$, gdzie G to obszar ograniczony przez $y=x^2,\ y+z-1=0,\ z=0;$
   d) $\iiint\limits_G 1dxdydz$, gdzie G to obszar ograniczony przez $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=4,$ $x+y+z=4,\ 16-x^2-y^2=4z;$
   e) $\iiint\limits_G y\cos(x+z)dxdydz$, gdzie G to obszar ograniczony przez $y=\sqrt{x},\ y=0,\ z=0,\ z=\frac{\pi}{2}-x.$

9. Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć podane całki po wskazanych obszarach:
   a) $\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, gdzie G to obszar ograniczony przez walec $x^2+y^2=2x$ i płaszczyzny $z=4,\ z=-2;$
   b) $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, gdzie G to obszar ograniczony przez stożek $x^2+y^2=z^2$ i płaszczyznę $z=1;$
   b) $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, gdzie G to obszar ograniczony przez $x^2+y^2=z,\ z=1,\ z=4.$

10. Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć podane całki po wskazanych obszarach:
    a) $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, gdzie G to obszar ograniczony przez $x^2+y^2+z^2=9,\ x^2+y^2+z^2=4,\ x\le 0,\ z\le 0;$
    b) $\iiint\limits_G xyzdxdydz$, gdzie G to obszar ograniczony przez $x^2+y^2+z^2=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0;$
    c) $\iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)^2dxdydz$, gdzie G to obszar ograniczony przez $x^2+y^2+z^2=4z;$
    d) $\iiint\limits_G \frac{1}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, gdzie G to obszar ograniczony przez $(x^2+y^2+z^2)^2=8z.$

11. Dokonując odpowiedniej zamiany zmiennych oblicz wskazane całki podwójne po obszarze G:
    a) $\iiint\limits_G ydxdydz$, gdzie G to obszar ograniczony przez $x=0,\ x=1,\ x+y=2,$ $x+y=4,\ x+y+z=4,\ x+y+z=5;$
    b) $\iiint\limits_G (18x^2+8y^2)e^zdxdydz$, gdzie G to obszar ograniczony przez $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1,\ |z|<5.$

12. Oblicz wartości średnie podanych funkcji na wskazanych obszarach:
    a) $f(x,y,z)=xy^2z^3$ na $V=[0,3]\times[0,2]\times[0,1];$
    b) $f(x,y,z)=x^2+y^2$ na obszarze ograniczonym $x^2+y^2=16,\ z^2=x^2+y^2$ dla $z\ge 0.$

13. Korzystając z całki potrójnej oblicz objętość bryły ograniczonej przez:
    a) trójwymiarową elipsoidę $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1;$
    b) walec $x^2+y^2-2y=3$ i płaszczyzny $x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=1;$
    c) walec $x^2+y^2=1$ i kulę $x^2+y^2+z^2=4;$
    d) stożek $z^2=x^2+y^2$ i kulę $x^2+y^2+z^2=8;$
    e) paraboloidę $z=x^2+y^2$ i płaszczyznę $z=1;$
    f) paraboloidę $z=6-x^2-y^2$ i stożek $z=\sqrt{x^2+y^2}.$

14. Oblicz masę kuli $x^2+y^2+z^2=4$, której gęstość $\varrho(x,y,z)$ w każdym punkcie jest równa odległości tego punktu od środka kuli.