# Całka podwójna

## Zadania

1. Oblicz całki iterowane:
   a) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{-2}^3 xydy$; b) $\int\limits_{-2}^1 dy \int\limits_1^5 (x+y)dx$;
   c) $\int\limits_{-2}^4 \left(\int\limits_0^2 \frac{y^2}{x^2+y^2}dx\right)dy$; d) $\int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^a r^2\sin^2\omega dr\right)d\omega,\ a>0$.

2. Oblicz całki podwójne po wskazanych prostokątach $P$:
   a) $\iint\limits_P (x^3-2xy+4)dxdy$, gdzie $P=[1;2]\times[-1;4]$;
   b) $\iint\limits_P x\sin(xy)dxdy$, gdzie $P=[0;1]\times[\pi;2\pi]$;
   c) $\iint\limits_P \frac{xydxdy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}dxdy$, gdzie $P=[0;1]\times[0;1]$;
   d) $\iint\limits_P (x\ln x+2xy)dxdy$, gdzie $P=[1;2]\times[0;1]$;
   e) $\iint\limits_P (12x^2y^3+\frac{1}{xy})dxdy$, gdzie $P=[1;2]\times[1;2]$.

3. Podane całki podwójne zamień na sumy iloczynów całek pojedynczych:
   a) $\iint\limits_P \cos(x-y)dxdy$, gdzie $P=[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,\frac{\pi}{3}]$;
   b) $\iint\limits_P xy\ln\frac{x}{y}dxdy$, gdzie $P=[1,e]\times[1,2]$.

4. Oblicz całki podwójne:
   a) $\int\limits_1^3 dx \int\limits_1^{\sqrt{x}} \frac{y}{x}dy$; b) $\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{2+\sin y}\frac{x}{2}dx\right)dy$;
   c) $\int\limits_0^1\left(\int\limits_x^{\sqrt{x}}(x+y)dy\right)dx$; d) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}}\frac{x}{y}dx$.

5. Zamień kolejność całkowania:
   a) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$; b) $\int\limits_{-2}^1\left(\int\limits_{y^2}^4 f(x,y)dx\right)dy$;
   c) $\int\limits_{-6}^2 dx\int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy$; d) $\int\limits_{-1}^1\left(\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy\right)dx$;
   e) $\int\limits_1^e\left(\int\limits_0^{\ln y} f(x,y)dx\right)dy$; f) $\int\limits_0^\pi dx\int\limits_{\sin x}^2 f(x,y)dy$;
   g) $\int\limits_{-1}^1\left(\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{|x|} f(x,y)dy\right)dx$; h) $\int\limits_0^2\left(\int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy\right)dx$.

6. Niech $f(x,y)$ będzie ciągła. Wykaż wzór Dirichleta dla dowolnego $a>0$:

$$\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x f(x,y)dy = \int\limits_0^a dy\int\limits_y^a f(x,y)dx.$$

7. Zamień całkę podwójną $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ na całki iterowane, jeśli $D$ jest obszarem ograniczonym poprzez:
   a) $x^2+y=2,\ y^3=x^2$; b) $x=y^2,\ x=\frac{1}{2}y^2+1$;
   c) $x^2+6x+y^2-4y-12=0$.

8. Oblicz całki podwójne po wskazanych obszarach $D$ :
   a) $\iint\limits_D (x^2y+4xy+y^2x)dxdy$, gdzie $D$ to obszar ograniczony przez $y=2x,\ y=x^2-2x$;
   b) $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$, gdzie $D$ to trójkąt o wierzchołkach $A=(-1,2),\ B=(2,-1),\ C=(5,5)$;
   c) $\iint\limits_D (2x+3y)dxdy$, gdzie $D$ to obszar ograniczony przez $y=1-|x|,\ y=-1$;
   d) $\iint\limits_D 2ydxdy$, gdzie $D$ to obszar ograniczony przez $y=\sqrt{x},\ y=0,\ x+y=2$;
   e) $\iint\limits_D xydxdy$, gdzie $D$ to ćwiartka elipsy $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1$ dla $x\geq 0,\ y\geq 0$;
   f) $\iint\limits_D |\cos(x+y)|dxdy$, gdzie $D=[0,\pi]\times[0,\pi]$;
   g) $\iint\limits_D \max\{2x,y\}dxdy$, gdzie $D=[0,2]\times[0,1]$;
   h) $\iint\limits_D x^2dxdy$, gdzie $D$ to obszar określony przez nierówność $|x|+|y|\leq 1$;
   i) $\iint\limits_D xydxdy$, gdzie $D$ to obszar określony przez $xy=2,\ |x-y|=1$;
   j) $\iint\limits_D sgn(y-x^2)dxdy$, gdzie $D=[0,2]\times[0,2]$;

9. Narysować obraz $D$ prostokąta $\Delta=[0;1]\times[2;4]$ w przekształceniu $T:\begin{cases} x=u+v; \\ y=u-v. \end{cases}$

10. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki po wskazanych obszarach:
   a) $\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}dxdy$, gdzie $D$ to obszar ograniczony przez $x^2+y^2\leq 3$;
   b) $\iint\limits_D xy^2\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, gdzie $D$ to obszar ograniczony przez $x^2+y^2\leq 1,\ x\leq 0,\ y\geq 0$;
   c) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, gdzie $D$ to obszar ograniczony przez $y=x,\ y=\sqrt{3}x,\ x^2+y^2=1$;
   d) $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, gdzie $D$ to obszar ograniczony przez $x^2+y^2=\frac{\pi^2}{4},\ x^2+y^2=\pi^2$;
   e) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, gdzie $D$ to obszar ograniczony przez $x^2+y^2-4y\leq 0$;
   f) $\iint\limits_D (3-2y)dxdy$, gdzie $D$ to obszar ograniczony przez $x^2+y^2\leq 1$;
   g) $\iint\limits_D xdxdy$, gdzie $D$ to obszar ograniczony przez $x^2+y^2-2y\leq 0,\ y=x$ dla $y\leq x$;

11. Oblicz wartości średnie podanych funkcji na wskazanych obszarach:
   a) $f(x,y)=\sin x\cos y$ na $D=[0,\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]$;
   b) $f(x,y)=|x-y|$ na obszarze ograniczonym $y=3-2x,\ y=0,\ x=0$.

12. Oblicz pole powierzchni płaskiej ograniczonej przez:
   a) $y=2x+2,\ xy=4,\ y=\sqrt{x}-1,\ x=0$; b) $y=2^x,\ y=2^{-2x},\ y=4$;
   c) $y=e^x,\ y=\ln x,\ x+y=1,\ x=2$; d) $y=2x+2,\ xy=4,\ y=\sqrt{x}-1,\ x=0$;
   e) $x^2+y^2=1,\ y=x^2+1,\ x+y=3\,y=0$; f) elipsy o równaniu $\left(\frac{x}{3}\right)^2+y^2=1$.

13. Oblicz objętość bryły ograniczonej przez:
    a) $z=0,\ y=1,\ y=x^2,\ z=x^2+y^2$;
    b) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=5-2x-y$;
    c) $y=1,\ y=5,\ z=x^2-6,\ z=-2$;
    d) $z=0,\ y=1,\ y=x^2,\ z=x^2+y^2$;
    e) $x^2+y^2+z^2=9,\ x^2+y^2=1$;
    f) $x^2+y^2+z^2=2,\ z=x^2+y^2$;
    g) $x^2+y^2-2y=0,\ z=x^2+y^2, z=0$;
    h) $z=0,\ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,\ z=\frac{1}{x^2+y^2}$;

14. Oblicz pola powierzchni płatów określonych następująco:
    a) pole płata hiperboloidy parabolicznej $z=x^2-y^2$ leżącej wewnątrz walca $x^2+y^2=1$;
    b) pole płata stożka $z=\sqrt{x^2+y^2}$ wyciętą przez walec $x^2+y^2=2x$;
    c) pole płata sfery $x^2+y^2+z^2=16$ leżącej pomiędzy płaszczyznami $z=1,\ z=2$;
    d) pole płata powierzchni $2z=x^2$ odciętej płaszczyznami $2y=x,\ ;y=2x,\ x=2\sqrt{2}$;
    e) pole powierzchni paraboloidy hiperbolicznej $z=xy$ leżącej wewnątrz walca $x^2+y^2=1$.

15. Dla funkcji:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x-y}{(x+y)^3} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

oblicz $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 f(x,y)dy$, $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 f(x,y)dx$. Co możesz wówczas powiedzieć o całkowalności w sensie Riemanna funkcji $f(x,y)$ na prostokącie $[0,1]\times[0,1]$.

16. Stosując Regułę Leibniza dla całki $\int\limits_0^1 \frac{x^y-1}{\ln x}dx$ wykaż, że $\int\limits_0^1 \frac{x-1}{\ln x}=\ln 2$.

17. Wykaż, że $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

18. Oblicz całkę niewłaściwą $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, gdzie $D$ to obszar ograniczony przez $0<x^2+y^2\leq 1$.

19. Dla jakich $m\in\mathbb{R}$ całka $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m}$, gdzie $D$ spełnia $x^2+y^2\geq 1$, jest zbieżna?

20. Dokonując odpowiedniej zamiany zmiennych oblicz wskazane całki podwójne po obszarze D:
    a) $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, gdzie $D$ to obszar ograniczony przez $2x+y=2,\ 2x+y=3, x-y=-1,$ $x-y=1$;
    b) $\iint\limits_D xydxdy$, gdzie $D$ to obszar ograniczony przez $xy=1,\ xy=2, y=x^2,\ y=3x^2$.

21. Czy obszar $D$ ograniczony wskazanymi krzywymi jest obszarem normalnym względem osi $Ox$? osi $Oy$? a może tylko regularny?
    a) $D$ to obszar ograniczony przez $y=x^2,\ y=\sqrt{x}$;
    b) $D$ to obszar ograniczony przez $y=0,\ x=2, y=x^2,\ y=x^2$;
    c) $D$ to obszar ograniczony przez $x^2+y^2=8$;
    d) $D$ to obszar ograniczony przez $y=\frac{1}{x},\ y=x,\ y=2x,\ x>0$;
    e) $D$ to obszar ograniczony przez $y=-1,\ y=1, x=-y^2,\ x=y^2+2$;
    f) $D$ to obszar ograniczony przez $y=|\sin x|,\ y=-1, x=-\frac{\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{2}$.