XVIII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl lutowy
Poziom: szkoły ponadpodstawowe
Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w „domu”)

Zadania przeznaczone do rozwiązywania „w domu”. Czas zwrotu rozwiązań 3 dni. Wyniki przesłać do dnia 29.02.2020 za pomocą formularza zamieszczonego na stronach zawodów http://wmii.uwm.edu.pl/~zawodymat

Zadanie 1. Funkcja $f: R \to R$ spełnia warunek:

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych x, y liczb rzeczywistych
2. $f(1) = 1$

Wykaż, że funkcja $f(x)$ jest: 1) nieparzysta, 2) $f(q) = q$ dla dowolnej liczby wymiernej q.

Zadanie 2. Wykaż, że równanie $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = 1$ nie ma rozwiązania.

Zadanie 3. Ciąg (a_n) określony jest następująco: $a_1 = 8$, $\dfrac{a_{n+1} - a_n}{n+1} = 8^{n+1}$ *dla* $n \geq 1$.

Obliczyć a_{2008}.

Zadanie 4. Do zbioru Z należą pierwiastki równań będące liczbami naturalnymi:

$$|x^2 - 4x - 5| = x - 5, \qquad x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0, \qquad 16^{\frac{x}{x+3}} = 4 \cdot \left(\frac{2^x}{8}\right)^{\frac{1}{2x+5}}.$$

Ze zbioru Z losujemy trzy cyfry (losowanie ze zwracaniem) układając je, w kolejności losowania, w liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

a) liczby o różnych cyfrach,
b) liczby podzielnej przez 5.

Zadanie 5. Wyznacz pole przekroju ostrosłupa , którego podstawą jest kwadrat o boku a, jego wysokość jest krawędzią boczną o długości $4a$ poprowadzonego płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi podstawy wychodzące z jednego wierzchołka i równoległą do jego wysokości.