

XVIII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Eliminacje – cykl grudzień

Poziom: szkoły ponadpodstawowe

Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w „domu”)

Zadania przeznaczone do rozwiązywania „w domu”. Czas zwrotu rozwiązań 3 dni. Wyniki przesłać do dnia 31.12.2019 za pomocą formularza zamieszczonego na stronach zawodów <http://wmii.uwm.edu.pl/~zawodymat>

Zadanie 1. Liczby całkowite dodatnie a, b, c spełniają warunki

$$\text{NWD}(a, b, c) = 1 \quad \text{i} \quad b^2 = ac.$$

Wykaż, że liczba $a + 2b + c$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $x! + y! = z!$ w zbiorze nieujemnych liczb całkowitych.

Zadanie 3. Każda z trójek liczb:

$$(\log a, \log b, \log c) \quad \text{oraz} \quad (\log a - \log 2b, \log 2b - \log 3c, \log 3c - \log a)$$

tworzą ciąg arytmetyczny. Udowodnij, że liczby a, b, c mogą być długościami boków trójkąta.

Zadanie 4. W trójkącie równoramiennym ABC kąt BAC jest prosty. Punkt D należy do boku BC , przy czym $BD = 2 CD$. Z punktu B prowadzimy prostą prostopadłą do prostej AD , punkt E jest punktem przecięcia tych dwóch prostych. Wyznacz miarę kąta CED .

Zadanie 5. Punkty przecięcia linii: $x^2 - 2x - y - 8 = 0$ oraz $2x + y - 1 = 0$ są końcami przekątnej rombu. Wyznaczyć wierzchołki tego rombu oraz obliczyć długość jego boku, jeżeli pole tego rombu wynosi 30 cm^2 .