X WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

KATEGORIA: GIMNAZJUM

ZADANIE 1

Jacek przechowuje swoje oszczędności w monetach dwu i pięciozłotowych. Wartość monet dwuzłotowych stanowi 35% jego oszczędności. Ile dwuzłotówek ma Jacek, jeśli ma 26 pięciozłotówek.

ROZWIĄZANIE:

x – liczba monet dwuzłotowych

y – liczba monet pięciozłotowych

$y = 26$

$2x$ - wartość monet dwuzłotowych

$5y$ - wartość monet pięciozłotowych

$5y = 5 \cdot 26 = 130$

$2x + 5y = 2x + 130$ - wartość oszczędności

$2x = 35\%$ z $(2x + 130)$

$2x = 0{,}35(2x + 130)$

$2x = 0{,}7x + 45{,}5$

$1{,}3x = 45{,}5$

$x = 35$

Odp.: Jacek posiada 35 monet dwuzłotowych.

X WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

KATEGORIA: GIMNAZJUM

ZADANIE 2

Trzy liczby całkowite dodatnie *a*, *b*, *c*, które spełniają równanie

$$a^2 + b^2 = c^2$$

nazywane są *trójkami Pitagorasa*. Liczba *c* nazywa się *przeciwprostokątną*, zaś *a* i *b* – *przyprostokątnymi*.

Znajdź **wszystkie** trójki Pitagorasa, w których jedna z przyprostokątnych jest równa 21.
Wskazówka. Można skorzystać ze wzorów:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

ROZWIĄZANIE:

Niech $a = 21$. Z definicji trójek wynika, że c i b spełniają równanie

$$c^2 - b^2 = 21^2 \quad \text{czyli} \quad (c-b)(c+b) = 441.$$

Biorąc pod uwagę to, że b i c są dodatnimi liczbami całkowitymi, $c + b > c - b > 0$, oraz to, że $441 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$, mamy tylko następujące możliwości dla b i c:

$$\begin{cases} c + b = 441 \\ c - b = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c + b = 147 \\ c - b = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} c + b = 49 \\ c - b = 9 \end{cases}$$

Odp.: $(21, 220, 221)$, $(21, 72, 75)$, $(21, 21, 29)$.

X WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

KATEGORIA: GIMNAZJUM

ZADANIE 3

Dwa samochody wyruszyły jednocześnie z miejscowości A do B. Obydwa jechały tą samą trasą, ale z różnymi, chociaż stałymi średnimi prędkościami, które wyrażają się liczbami naturalnymi. Różnica prędkości samochodów jest liczbą pierwszą. Odległość między A i B wynosi 100 km. Po dwóch godzinach jazdy odległość mniej szybkiego samochodu od miejscowości A była pięć razy większa od odległości bardziej szybkiego samochodu od miejscowości B.

Z jaka prędkością jechały samochody?

ROZWIĄZANIE:

Oznaczmy przez *d* odległość, którą szybszy samochód przejechał w kierunku B w ciągu dwóch godzin. W takim razie jego odległość od B wynosi $(100-d)$ km, odległość zaś od A mniej szybkiego samochodu wynosi $(100-d)\cdot 5 = 500-5d$.

Zakładając, że prędkość szybszego samochodu wynosi v km/h, a mniej szybkiego w km/h możemy napisać dwa równania

$\frac{d}{v} = 2$ i $\frac{500-5d}{w} = 2$.

Z równań tych otrzymujemy

$d = 2v$, $d = \frac{500-2w}{5} = 100 - \frac{2}{5}w$

$2v = 100 - \frac{2}{5}w$

$w = 250 - 5v$

Wobec tego różnica prędkości samochodów wynosi

$v - w = v - 250 + 5v = 6v - 250 = 2(3v - 125)$

Aby różnica $v - w$ była liczbą pierwszą, różnica $3v - 125$ musi się równać 1.

Z równania $3v - 125 = 1$ otrzymujemy $v = 42$ i $w = 40$

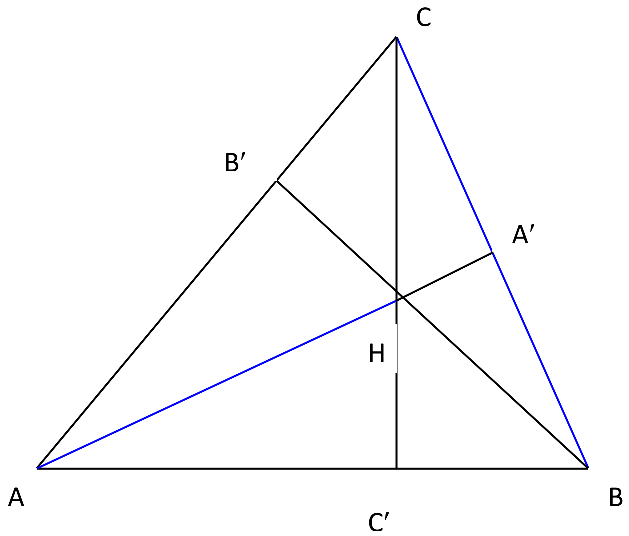
X WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

KATEGORIA: GIMNAZJUM

ZADANIE 4

Dany jest trójkąt ostrokątny *ABC*, w którym $\angle CAB = 45^\circ$. Wysokości tego trójkąta przecinają się w punkcie *H*. Wykaż, że $|AH| = |BC|$.

ROZWIĄZANIE:



$$\left.\begin{array}{l}\angle CAB = 45^\circ \\ \angle AB'B = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle ABB' = 45^\circ \Rightarrow |AB'| = |B'B| = a$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle CAC' = 45^\circ \\ \angle AC'C = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle ACC' = 45^\circ = \angle B'CH$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle B'CH = 45^\circ \\ \angle HB'C = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle B'HC = 45^\circ \Rightarrow |B'C| = |B'H| = b$$

$$\left.\begin{array}{l}|AH|^2 = |AB'|^2 + |B'H|^2 = a^2 + b^2 \\ |BC|^2 = |B'B|^2 + |B'C|^2 = a^2 + b^2\end{array}\right\} \Rightarrow |AH| = |BC|$$

X WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

KATEGORIA: GIMNAZJUM

ZADANIE 5

Pewien graniastosłup ma dwa razy więcej wierzchołków niż pewien ostrosłup. Który z tych wielościanów ma więcej ścian i o ile więcej?

ROZWIĄZANIE:

Ostrosłup o n wierzchołkach ma podstawę o (n-1) wierzchołkach, czyli jest to wielokąt o (n-1) bokach. Taki ostrosłup ma (n-1) ścian bocznych i jedną podstawę zatem ma n ścian.

Graniastosłup o 2n wierzchołkach ma dwie podstawy, które są wielokątami o n bokach. Zatem graniastosłup ma n ścian bocznych. Dodając do tego dwie podstawy mamy n+2 ściany.

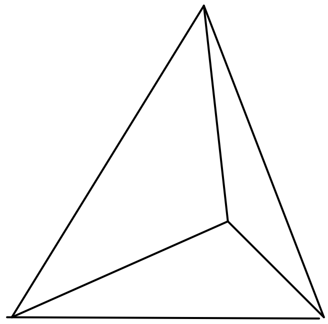
Zatem graniastosłup, który ma dwa razy więcej wierzchołków niż pewien ostrosłup ma o dwie ściany więcej niż ten ostrosłup.

Na przykład.

Ostrosłup

Liczba wierzchołków:

$w = n = 4$



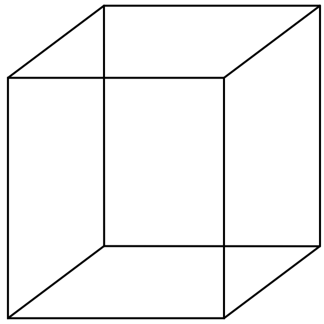
Liczba ścian:

$s = 3 + 1 = 4 = n$

Graniastosłup

Liczba wierzchołków:

$w = 2n = 8$



Liczba ścian:

$s = 4 + 2 = 6 = n + 2$