1. Mając do dyspozycji 100 metrów bieżących siatki, chcemy ogrodzić prostokątne pastwisko. Jedna strona pastwiska biegnie wzdłuż kanału o prostej linii brzegowej, więc nie musimy grodzić tej strony. Jakie powinny być wymiary pastwiska, aby jego powierzchnia była największa?

   Rozwiązanie:

   Powiedzmy, że wymiary pastwiska wynoszą x i y. Wówczas $2x + y = 100$ (przyjmujemy, że strona pastwiska o długości y znajduje się przy kanale). Powierzchnia pastwiska wynosi

   $$P = xy = x(100 - 2x).$$

   Widzimy, że powierzchnia pastwiska jest funkcją jednej zmiennej x. Funkcja ta jest parabolą o ujemnym współczynniku przy x^2 i pierwiastkach 0 i 50, zatem największą swoją wartość przyjmuje dla $x = 25$. Dla tej wartości x mamy $y = 50$.

2. Rozwiąż układ równań

   $$\begin{cases} xy^2z^3 = 2 \\ zx^2y^3 = 4 \\ yz^2x^3 = 8. \end{cases}$$

   Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, że $x \neq 0$, $y \neq 0$ i $z \neq 0$.

   Dzieląc pierwsze równanie przez drugie i drugie przez trzecie otrzymujemy:

   $$\frac{z^2}{xy} = \frac{1}{2}, \quad \frac{y^2}{xz} = \frac{1}{2}.$$

   Stąd

   $$\frac{z^2}{xy} = \frac{y^2}{xz}, \text{ a zatem } y = z \text{ i } 2y = x.$$

   Podstawiając otrzymane równości do pierwszego równania otrzymujemy $y^6 = 1$.
   Ostatecznie $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ lub $(x, y, z) = (-2, -1, -1)$.

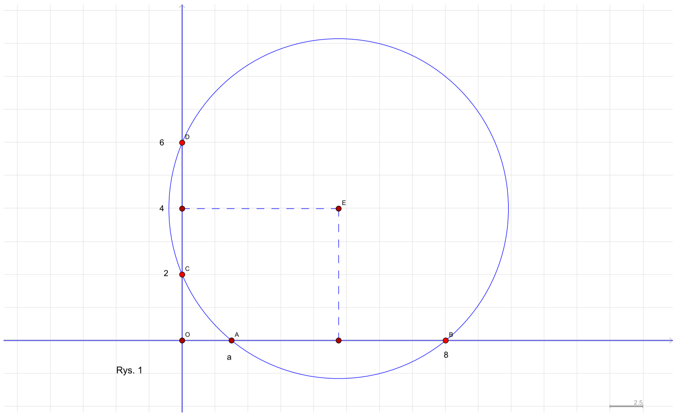
3. Znajdź wszystkie wielomiany $P(x)$ mające własność

   $$xP(x - 1) = (x - 2)P(x)$$

   dla każdej wartości zmiennej x.
   Rozwiązanie:
   Wstawiając $x = 0$, $x = 2$ otrzymamy $P(0) = 0$ oraz $P(1) = 0$.
   Zatem $P(x) = x(x - 1)Q(x)$, gdzie $Q(x)$ jest pewnym wielomianem spełniającym równość

   $$x(x - 1)(x - 2)Q(x - 1) = (x - 2)x(x - 1)Q(x).$$

   Czyli $Q(x - 1) = Q(x)$, więc wielomian $Q(x)$ jest stały. Ostatecznie $P(x) = cx(x - 1)$, gdzie c jest dowolną stałą.



4. Rozpatrzmy okrąg przechodzący przez trzy punkty: $B(8, 0)$, $C(0, 2)$ i $D(0, 6)$.

   Okrąg ten przecina oś odciętych w punkcie $B(8, 0)$ i w jeszcze jednym punkcie $A(a, 0)$. Znajdź ten punkt A, czyli znajdź wartość pierwszej współrzędnej.
   Rozwiązanie 1 (analityczne):
   Środek okręgu ma współrzędne $E\left(\frac{8+a}{2}, 4\right)$, Rys. 1, zatem równanie okręgu ma postać

$$\left(x - \frac{8+a}{2}\right)^2 + (y-4)^2 = r^2.$$

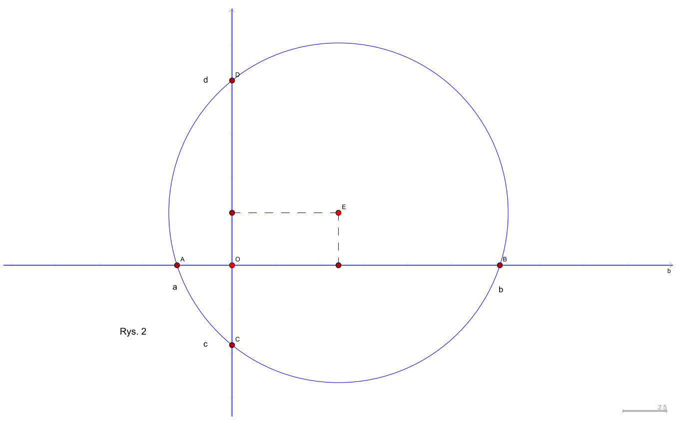
Podstawiając do powyższego równania kolejno współrzędne punktów A i C i wykonując odpowiednie działania algebraiczne otrzymujemy

$$-16a + 64 = 4r^2, \qquad 16a + 16 = 4r^2.$$

Odejmując stronami pierwsze równanie od drugiego otrzymamy

$$32a = 48, \quad a = \frac{3}{2}.$$

Uwaga. Zauważmy, że powyższe rozumowanie możemy uogólnić na dowolne położenie



punktów A, B, C i D na odpowiednich osiach, Rys. 2. Jeżeli punkty te mają odpowiednio współrzędne

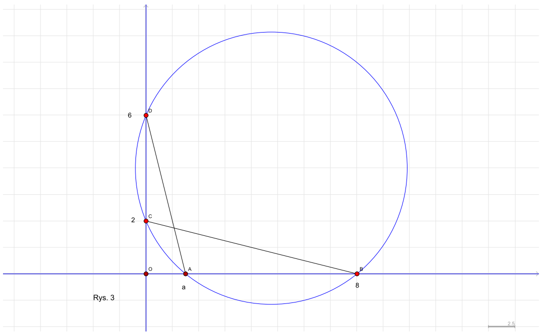
$$A(a, 0),\ B(b, 0),\ C(0, c),\ D(0, d),$$

to otrzymamy, że

$$|ab| = |cd|.$$

Rozwiązanie 2 (geometryczne): Kąty $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle CDA$ są oparte na tym samym łuku $\breve{AC}$, a więc mają taką samą miarę, Rys. 3. Wynika z tego, że trójkąty $\triangle OBC$ i $\triangle ODA$ są podobne, ponieważ mają ponadto wspólny kąt przy wierzchołku O. Dzieląc przez siebie długości odpowiednich boków otrzymujemy

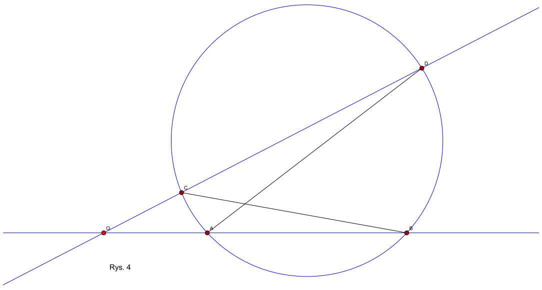
$$\frac{|OA|}{|OD|} = \frac{|OC|}{|OB|}, \quad \frac{a}{6} = \frac{2}{8}, \quad a = \frac{3}{2}.$$



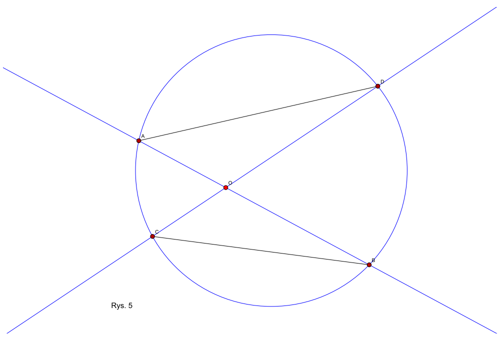
Rys. 3

Uwaga. Zauważmy, że powyższe rozumowanie daje jeszcze dalej idące uogólnienie niż Rozwiązanie 1. Mianowicie proste przecinające okrąg nie muszą być prostopadłe, Rys. 4. Jeżeli nierównoległe proste przecinają się w punkcie O (położenie punktu O względem okręgu nadal nie ma znaczenia, Rys. 5) i jedna przecina okrąg w punktach A i B, a druga w punktach C i D, to otrzymujemy, że

$$|OA||OB| = |OC||OD|.$$



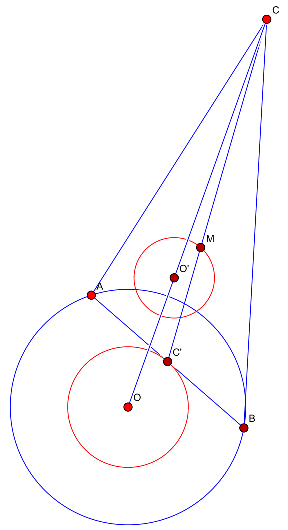
Rys. 4



Rys. 5

5. Umieśćmy punkty A i B na pewnym okręgu $\mathcal{O}$, a punkt C na zewnątrz tego okręgu. Niech punkt M będzie środkiem ciężkości trójkąta $\triangle ABC$. Jaką figurę zakreśli punkt M, jeżeli punkty A i B będą poruszały się po okręgu $\mathcal{O}$ zachowując odległość?

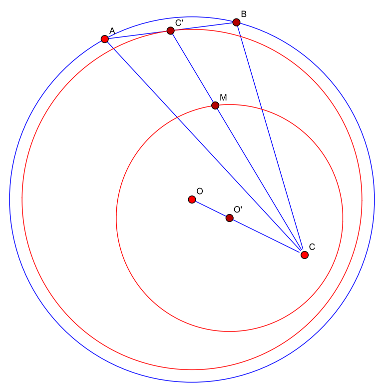
Rozwiązanie:



Rys. 6

Oznaczmy środek okręgu $\mathcal{O}$ przez O. Środek C' odcinka AB zakreśli okrąg o środku w punkcie O. Środek ciężkości trójkąta $\triangle ABC$ jest obrazem punktu C' w jednokładności o środku w punkcie C i skali $2/3$. Szukaną figurą będzie zatem okrąg o środku leżącym w $2/3$ odcinka CO o promieniu długości $\frac{2}{3}|OC'|$. Rys. 6.

Uwaga. W powyższym rozumowanie nie wykorzystywaliśmy faktu, że punkt C leży na zewnątrz okręgu $\mathcal{O}$. W istocie położeniu punktu C względem okręgu $\mathcal{O}$ nie ma znaczenia. Rys. 7.



Rys. 7