VI Warmińsko–Mazurskie Zawody Matematyczne
rozwiązania zadań (szkoły ponadgimnazjalne)

Zad. 1. Pokaż, że wielomian

$$x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$$

przyjmuje tylko wartości dodatnie.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy $x^8 \geq 0$ oraz $x^2 \geq 0$. Ponieważ dla $x \leq 0$ mamy również $x^5 \geq 0$ oraz $x \geq 0$ to, biorąc pod uwagę, że $1 > 0$, pokazaliśmy dodatniość wielomianu dla $x \leq 0$.

W przedziale $x \in (0, 1)$ słuszne są nierówności $x^2 > x^5$ oraz $1 > x$. Łącząc drugi składnik z trzecim oraz czwarty z piątym pokazujemy dodatniość wielomianu dla x z tego przedziału.

Ostatecznie, dla $x \geq 1$ mamy $x^8 \geq x^5$ oraz $x^2 \geq x$. Łącząc teraz pierwszy składnik z drugim oraz trzeci z czwartym pokazujemy dodatniość wielomianu w ostatniej części $x \geq 1$ prostej rzeczywistej.

Zad. 2.

Pokaż, że liczba $\sqrt{5n+2}$ jest niewymierna dla dowolnej liczby naturalnej n.

Rozwiązanie:

Mamy pokazać, że $5n + 2$ nie jest kwadratem liczby naturalnej. Zauważmy, że kwadraty liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 mają jako ostatnią cyfrę tylko 1, 4, 5, 6, 9. Z reguł mnożenia liczb wielocyfrowych wynika, że wszystkie kwadraty liczb naturalnych też kończą się tylko takimi cyframi, lub zerem.

Ostatniej cyfrą liczby postaci $5n + 2$ może być tylko 2 (dla n będącego liczbą parzystą) albo 7 (dla nieparzystego n). Ponieważ zauważyliśmy powyżej, że kwadrat liczby naturalnej nie może kończyć się ani cyfrą 2, ani cyfrą 7, więc $5n + 2$ nie może być pełnym kwadratem.

Uwaga: Jeden z zawodników znalazł prostsze rozwiązanie wykorzystujące zapis liczby naturalnej w systemie piątkowym. Wtedy ostatnią cyfrą liczby pod pierwiastkiem może być tylko 2, a kwadraty liczb naturalnych w systemie piątkowym kończą się tylko cyframi 0, 1, 4.

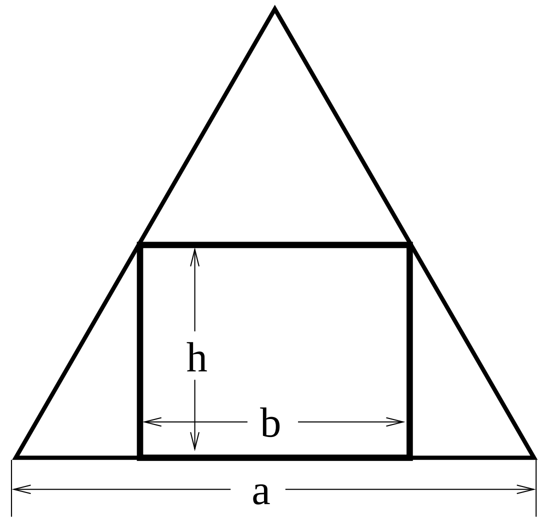
Zad. 3 Jakie jest największe możliwe pole prostokąta, którego wierzchołki leżą na bokach tójkąta równobocznego o boku a?

Rozwiązanie:

Przypomnijmy, że wysokość w trójkącie równobocznym o boku a jest równa $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, a pole tego trójkąta wynosi $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Nietrudno przekonać się, że nasz prostokąt ma jeden bok na boku trójkąta, na przykład na podstawie. Niech długość tego boku prostokąta będzie b, a jego wysokośćniech będzie h (patrz Rys. 1). Po wyjęciu tego prostokąta z trójkąta pozostają trzy trójkąty. Trójkąt na górze jest trójkątem równobocznym o boku b. Dwa trójkąty, z lewej i prawej strony, złożą się w trójkąt równoboczny o wysokości h, i podstawie $a - b$. Mamy więc $h = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - b)$, i pole naszego prostokąta jest równe

$$bh = \frac{\sqrt{3}}{2}b(a - b).$$



RYSUNEK 1. Prostokąt wpisany w trójkąt równoboczny

Funkcja kwadratowa $b(a-b)$ zeruje się dla $b = 0$ i $b = a$. Pomiędzy zerem i a funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie, najwiekszą w środku. Pole największego prostokąta jest więc równe

$$bh = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$$

Maksymalny prostokąt pokrywa więc połowę pola trójkąta równobocznego.

Zad. 4 A i B są ustalonymi punktami danego okręgu. Trzeci punkt C porusza się po tym samym okręgu. Opisz figurę utworzoną przez środki ciężkości trójkątów ABC.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez A', B', C' środki boków naprzeciwległych wierzchołkom A, B, C, odpowiednio, przez O oznaczmy środek danego okręgu, a przez R jego promień. Ponieważ środek ciężkości S trójkąta ABC dzieli odcinek CC' w stosunku $2 : 1$, więc szukaną figurą jest obraz naszego okręgu w jednokładności o środku w punkcie C' i skali $\frac{1}{3}$. Jest to więc okrąg o promieniu $\frac{1}{3}R$ i o środku M (patrz Rys. 2) będącym obrazem punktu O w tej jednokładności, czyli środku ciężkości trójkąta AOB.

Zad. 5 Cząsteczka fulerenu C_{60} ma 60 atomów węgla, które znajdują się w wierzchołkach pewnego wielościanu wypukłego P. Wielościan P ma ściany dwóch rodzajów: pięciokąty foremne i sześciokąty foremne. W każdym wierzchołku wielościanu P spotykają się trzy ściany: dwie sześciokątne i jedna pięciokątna. Ile ścian pięciokątnych, a ile ścian szesciokątnych ma wielościan P?

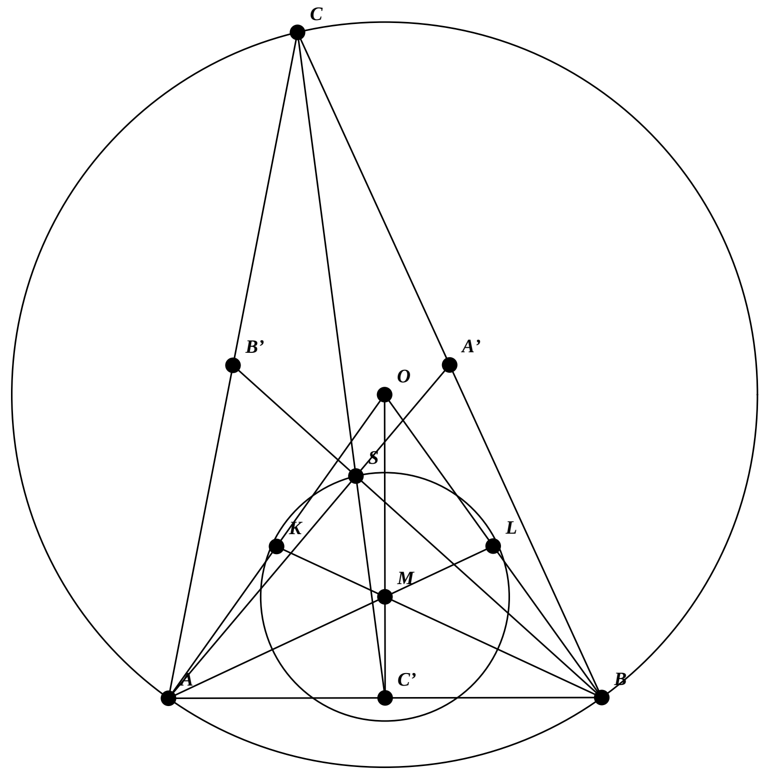
W rozwiązaniu skorzystaj z faktu, że w każdym wielościanie wypukłym liczba jego ścian S, liczba krawędzi K i liczba wierzchołków W związane są wzorem Eulera

$$S - K + W = 2$$

Rozwiązanie:

Niech s będzie liczbą ścian sześciokątnych, a p liczbą ścian pieciokątnych. Rozetnijmy nasz wielościan na oddzielne ściany. Mamy w nich łącznie $6s + 5p$ wierzchołków i tyle samo boków.

Przy ponownym sklejaniu tych oddzielnych ścian w wielościan P otrzymujemy trzy razy mniej wierzchołków i dwa razy mniej krawędzi.



Rysunek 2. Okrąg utworzony przez środki ciężkości trójkątów ABC

Jest tak dlatego, że w każdym wierzchołku spotykają się trzy wierzchołki trzech sklejanych ścian. Podobnie każda krawędź powstaje z dwóch boków sklejanych z sobą ścian.

Mamy więc

$$W = \frac{6s+5p}{3}, \qquad K = \frac{6s+5p}{2}.$$

Ponieważ $W = 60$, otrzymujemy stąd że $6s + 5p = 180$, a liczba krawędzi $K = 90$. Ze wzoru Eulera otrzymujemy dalej że $s + p = S = K - W + 2 = 32$. Układ równań

$$6s + 5p = 180$$
$$s + p = 32$$

ma jedyne rozwiązanie $s = 20, p = 12$.

Chociaż węgiel towarzyszy człowiekowi od stuleci to dopiero w latach 70-dziesiątych ubiegłego wieku odkryto, że atomy węgla moga łączyć się w ogromne cząsteczki, nazywne teraz fulerenami. Występują one w sadzy w kominie, w popiele ogniska, ale w bardzo małych ilościach.

Wielościan P można zobaczyć w następujący sposób. Weźmy dwudziestościan foremny, który ma 20 ścian bedących trójkątami równobocznymi, 12 wierzchołków i $K = S + W - 2 = 30$ krawędzi. W każdym wierzchołku spotyka się 5 trójkątnych ścian. Ścinamy wszystkie wierzchołki otrzymując w ten sposób 12 dodatkowych ścian pięciokątnych, a więc łącznie 32 ściany i 60 wierzchołków. Trójkątne ściany w których obetniemy wszystkie kąty stają się sześciokątami. Jest ich w dalszym ciągu 20. To jest nasz wielościan. I jest to również kształt piłki nożnej! Kształt ten został wybrany jako oficjalna piłka zanim odkryto fulereny, ale przyroda miała ten pomysł dużo wcześniej.