VII Warmińskie Zawody Matematyczne

14 maja 2009

Wydział Matematyki i Informatyki UWM w Olsztynie

Zad.1 Czy można ponumerować krawędzie czworościanu liczbami od 1 do 6 tak, aby suma numerów krawędzi każdej ściany była taka sama?

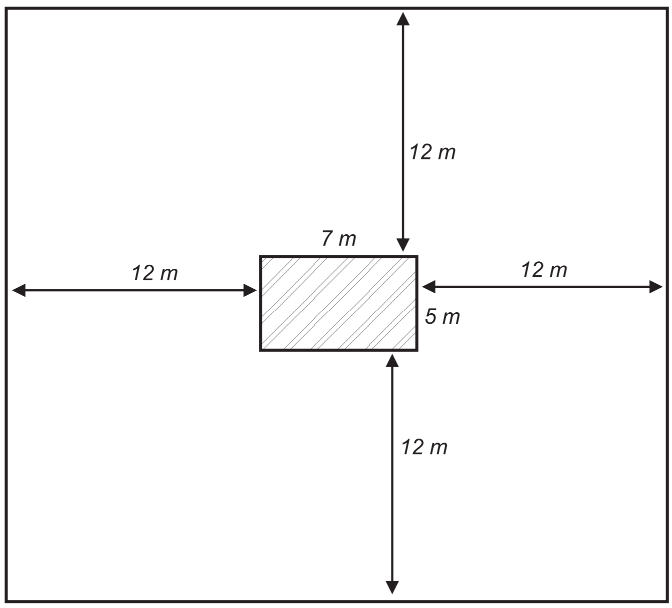
Zad.2 Wiadomo, że liczby naturalne a, b spełniają zależność $5a = 7b$. Wykazać, że $a + b$ dzieli się przez 12.

Zad.3 W trójkącie ABC odcinki AD i BE są wysokościami przecinającymi się w punkcie H. Punkty P, Q, R, S są środkami odpowiednio odcinków BC, CA, AH, BH. Uzasadnij, że czworokąt P, Q, R, S jest prostokątem. *W rozwiązaniu możesz skorzystać z faktu, że trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.*

Zad.4 Znajdź wartość $f(2)$, jeśli dla dowolnego $x \neq 0$ spełniona jest równość

$$f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2.$$

Zad.5 Aby chronić magazyn i podwórko właściciel magazynu zmierzył odległości od budynku do ogrodzenia (zob. rysunek). Do naroża budynku w kształcie prostokąta o wymiarach 5m × 7m przywiązał psa na smyczy o długości 12 m. Wyznacz pole powierzchni obszaru podwórka, który nie jest chroniony przez psa. Wielkość psa zaniedbujemy.



Rysunek 1

Rozwiązania.

(1) Nie. Suma liczb jest równa 21. Każda krawędź należy do dwóch ścian. Jeśli zatem dodamy numery krawędzi każdej ściany i następnie otrzymane sumy numerów poszczególnych ścian, to dostaniem 42. Jest to sprzeczne z założeniem, że suma numerów krawędzi każdej ściany jest taka sama, bo 42 nie dzieli się przez 4.

(2) Korzystając z danej równości można zapisać $a+b = 6a-5a+7b-6b = 6(a-b)$ i $a+b = -4a+5a-7b+8b = 4(2b-a)$.

(3) Z twierdzenia Talesa zastosowanego najpierw do prostych CA i CB, następnie do HA i HB wynika, że $PQ \parallel AB \parallel RS$. Analogicznie stosując twierdzenie Talesa do prostych AC i AH oraz do BC i BH mamy $QR \parallel CH \parallel PS$. Zatem $PQRS$ jest równoległobokiem. Ponadto $PQ \parallel AB \perp CH \parallel PS$ ponieważ prosta CH jest trzecią wysokością trójkąta. Zatem $PQRS$ jest prostokątem.

(4) Podstawiając $x = 2$ oraz $x = \frac{1}{2}$ otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} f(2) + 3f(\frac{1}{2}) & = & 4 \\ f(\frac{1}{2}) + 3f(2) & = & \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Po jego rozwiązaniu otrzymujemy $f(2) = -\frac{13}{32}$.

(5) Pole podwórka wraz z budynkiem to $(12+7+12)\cdot(12+5+12) = 31\cdot 29 = 899$.
Pole obszaru chronionego to
$\frac{1}{4}\pi 5^2 + \frac{3}{4}\pi 12^2 + \frac{1}{4}\pi 7^2 = \frac{1}{4}\pi(25 + 3\cdot 144 + 49) = \frac{506\pi}{4} = 126.5\pi$
Pole zajmowane przez budynek to $7 \cdot 5 = 35$
Odpowiedź:
Szukany obszar ma pole $899 - 35 - 126.5\pi = 864 - 126.5\pi$.