Kategoria: klasy 3-4 szkoły ponadpodstawowej

Zadanie 1. Żołnierz na froncie może dostawać do jedzenia jedną z pięciu potraw: grochówkę, kaszę, schabowy, rybę lub sałatkę. Żołnierz chciałby wybrać swoją ulubioną potrawę. Wiadomo, że gdyby spróbował dowolnych dwóch dań, byłby w stanie jednoznacznie wskazać, które smakuje mu bardziej - nie ma potraw równo lubianych. Każdego dnia żołnierz otrzymuje inną, losowo wybraną potrawę. W ciągu maksymalnie pięciu dni musi zdecydować, czy potrawę z danego dnia wybiera na stałe (do końca wojny). Jeśli odrzuci danie i spróbuje kolejnego, nie może już wrócić do poprzedniego. Jeśli zaczeka do piątego dnia, musi zaakceptować ostatnią potrawę. Określ strategię żołnierza, która maksymalizuje szansę wyboru ulubionej potrawy, wiedząc, że wynosi ona $\frac{13}{30}$.

Zadanie 2. W Krainie Trójkątnej stały trzy zamki: Arkadia (A), Bobolice (B) i Czocha (C). Łączyły je trzy proste drogi, a ponieważ tutejsi budowniczowie nie cierpieli kąta prostego, żaden z rogów krainy nie był prosty. Pewnego ranka stary kartograf rozłożył wielką mapę. Z każdego zamku poprowadził linię prostopadłą do drogi łączącej dwa pozostałe zamki - taką, która "spada"na przeciwległą drogę dokładnie pod kątem prostym. Ku zdumieniu całego dworu wszystkie trzy linie spotkały się w jednym jedynym punkcie. Kartograf nazwał go H i właśnie tam król kazał wznieść Królewski Pawilon Rybacki - altanę zawieszoną nad wodą, z której dwór miał łowić ryby. Wkrótce król wpadł na kolejny pomysł i rozkazał otoczyć krainę trzema okrągłymi, zarybionymi fosami, tak aby każda z nich przepływała przez pawilon:

- pierwsza miała przechodzić przez Arkadię, Bobolice i pawilon H,
- druga przez Bobolice, Czochę i pawilon H,
- trzecia przez Czochę, Arkadię i pawilon H.

Skarbnik złapał się za głowę: „Trzy różne fosy to trzy różne ilości kamienia i trzy różne rachunki!". Ale młoda uczennica królewskiego geometry tylko się uśmiechnęła i powiedziała: „Niech się skarbnik nie martwi. Wszystkie trzy fosy będą dokładnie tej samej wielkości."Rozstrzygnij, czy uczennica miała rację.

Zadanie 3. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których wyrażenie $\sqrt{n-2026}+\sqrt{n+2026}$ przyjmuje wartość całkowitą.

Zadanie 4. Udowodnij, że jeśli p i q są liczbami pierwszymi większymi od 3, to różnica ich kwadratów jest podzielna przez 24.

Zadanie 5. Niech $f(x) = \prod_{k=1}^{2023}(x+2k) + \prod_{k=1}^{2023}(x+2k-1)$. Ile rozwiązań rzeczywistych ma równanie $f(x) = 0$? Uwaga. $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot ... \cdot a_n$.