

Kategoria: klasy 1-2 szkoły ponadpodstawowej

Zadanie 1. W krainie Matmaczaków walutą są Matusy. W kantorze dostępny jest dokładnie jeden banknot każdego nominału od 1 do 100 Matusów (czyli: 1, 2, 3, 4, ..., 100 Matusów) z limitem wymiany maksymalnie do 100 Matusów na osobę. Cena banknotu o nominale x Matusów wynosi tyle złotych ile liczba x ma dzielników. Na przykład banknot 10 Matusów kosztuje 4 złote, bo 10 ma cztery dzielniki 1, 2, 5, 10. Trzech braci chce kupić banknoty o łącznej wartości 300 Matusów. Jakim najniższym łącznym kosztem w złotówkach mogą dokonać tej wymiany?

Zadanie 2. Rozwiąż równanie:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 13} + \sqrt{x^2 - 4x + 20} = -x^2 + 4x + 3.$$

Zadanie 3. Niech p oraz q będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Udowodnij, że jeżeli istnieje prostopadłościan, którego suma długości wszystkich krawędzi wynosi $4p$, a pole powierzchni całkowitej wynosi $2q$, to $p^2 \geq 3q$.

Zadanie 4. Udowodnij, że iloczyn czterech kolejnych liczb parzystych powiększony o 16 jest kwadratem pewnej liczby całkowitej.

Zadanie 5. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 2026x$. Wykaż, że $W(n)$ jest podzielne przez 3 dla $n \in \mathbb{Z}$.