

XXII WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

Olsztyn, 29 maja 2025 r.

Kategoria: klasa 7–8 szkoły podstawowej

Zadanie 1. Masz do dyspozycji prostokątną kartkę papieru o polu powierzchni 112 cm^2 . Jakie wymiary (będącymi liczbami naturalnymi) powinna posiadać kartka, aby możliwe było wycięcie z niej jak największej liczby kwadratów o różnych polach, których długości boków są kolejnymi liczbami naturalnymi? Znajdź wszystkie możliwości.

Rozwiązanie:

Szukamy wymiarów $a \times b$, gdzie $a \cdot b = 112$. Chcemy wyciąć kwadraty o bokach będących kolejnymi liczbami całkowitymi $(1, 2, 3, \dots)$.

Wtedy:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Sprawdźmy dla różnych wartości n :

- Dla $n = 6$: $\frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} = 91 \text{ cm}^2 < 112 \text{ cm}^2$
- Dla $n = 7$: $\frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} = 140 \text{ cm}^2 > 112 \text{ cm}^2$

Zatem możemy wyciąć maksymalnie 6 kwadratów o bokach 1, 2, 3, 4, 5 i 6 cm.

Aby wyciąć kwadraty o bokach 1, 2, 3, 4, 5 i 6 cm, potrzebujemy kartki, której najmniejszy wymiar wynosi co najmniej 6 cm (aby pomieścić największy kwadrat).

Znajdźmy pary liczb całkowitych (a, b) takie, że $a \cdot b = 112$, gdy $a \geq 6$ i $b \geq 6$

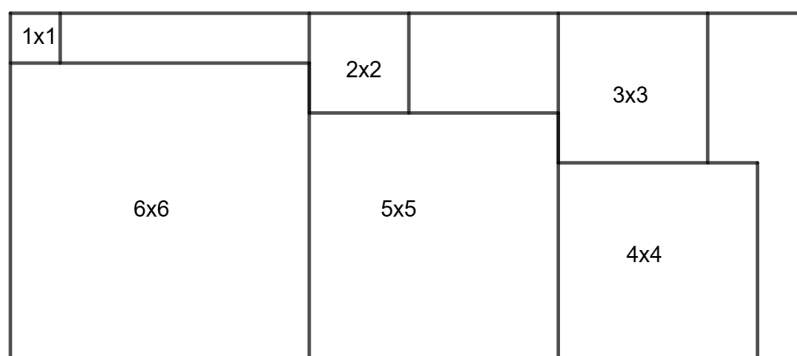
Dzielniki liczby $112 = 2^4 \cdot 7 = 16 \cdot 7$: 1, 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 56, 112

Pary spełniające nasze warunki to:

$$(7, 16), (8, 14), (14, 8), (16, 7)$$

Ze względu na symetrię, mamy dwa unikalne prostokąty: 7×16 i 8×14 .

Przykładowy rozkład dla 7×16



Wariant 8×14 nie może być zrealizowany, bo po rozłożeniu kwadratów o boku 6 i 5 nie będzie już miejsca na kwadrat o boku 4.

XXII WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

Olsztyn, 29 maja 2025 r.

Kategoria: klasa 7–8 szkoły podstawowej

Zadanie 2. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste x, y takie, że

$$\frac{5x - y}{4x + 3y}$$

jest liczbą wymierną. Wykaż, że liczba

$$\frac{x - y}{x + y}$$

też jest wymierna.

Rozwiązanie:

Niech

$$\frac{5x - y}{4x + 3y} = q, \quad q \in \mathbb{Q}.$$

Wtedy

$$q = \frac{5x - y}{4x + 3y} \implies q(4x + 3y) = 5x - y \implies 4qx + 3qy = 5x - y$$

$$\implies 5x - 4qx = y + 3qy \implies x(5 - 4q) = y(1 + 3q) \implies \frac{x}{y} = \frac{1 + 3q}{5 - 4q}.$$

Ponieważ $q \in \mathbb{Q}$, to również $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$. W konsekwencji

$$\frac{x - y}{x + y} = \frac{\frac{x}{y} - 1}{\frac{x}{y} + 1}$$

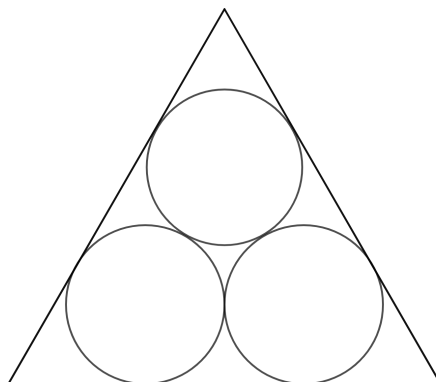
jest ilorazem dwóch liczb wymiernych, a zatem jest liczbą wymierną.

XXII WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

Olsztyn, 29 maja 2025 r.

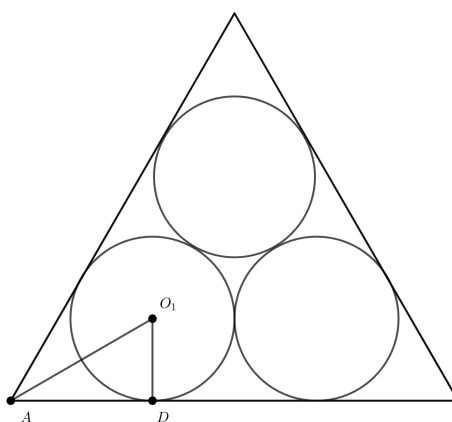
Kategoria: klasa 7–8 szkoły podstawowej

Zadanie 3. Długość boku trójkąta równobocznego jest równa 1. Wyznacz średnicę okręgów wpisanych w ten trójkąt jak na rysunku poniżej.



Rozwiązanie:

Niech r będzie promieniem okręgu. Wówczas $|AD| = \sqrt{3}r$ (twierdzenie Pitagorasa, trójkąt prostokątny o jednym z kątów równym 30°).



A więc

$$2(\sqrt{3}r + r) = 1 \implies 2r(\sqrt{3} + 1) = 1 \implies r = \frac{1}{2(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}.$$

Stąd średnica

$$d = 2r = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

XXII WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

Olsztyn, 29 maja 2025 r.

Kategoria: klasa 7–8 szkoły podstawowej

Zadanie 4. Na parkingu magazynu stało pomiędzy 50 a 100 samochodów transportowych łącznie - tiry oraz dostawczaki. Tiry ustawiły się w jednej kolumnie, a dostawczaki obok w drugiej w taki sposób, że obydwa konwoje były równej długości. Ile było tirów, a ile dostawczaków, jeśli każdy tir ma długość 37 metrów i zachowywały one między sobą odstępy 3 m, a dostawczaki są długie na 15 metrów i zachowują odstęp 2 metry?

Rozwiązanie: Oznaczmy przez x - liczbę tirów, y - liczbę dostawczaków.

Ponieważ konwoje mają równą długość, możemy zapisać równanie:

$$37x + 3(x - 1) = 15y + 2(y - 1)$$

Przekształcamy:

$$37x + 3x - 3 = 15y + 2y - 2$$

$$40x - 3 = 17y - 2$$

$$40x - 17y = 1$$

Algorytm Euklidesa daje rozwiązanie szczególne: $x = 3$, $y = 7$ (suma pojazdów to 10).

Rozwiązanie ogólne możemy zapisać jako: $x = 3 + 17k$, $y = 7 + 40k$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Z warunku łącznej liczby pojazdów ($50 < x + y < 100$) znajdujemy, że $k = 1$ jest jedyną odpowiednią wartością.

Stąd $x = 20$, $y = 47$.

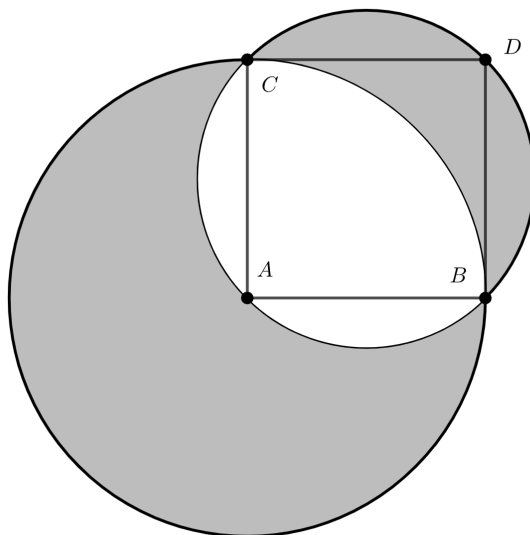
Odpowiedź: Było 20 tirów oraz 47 dostawczaków.

XXII WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

Olsztyn, 29 maja 2025 r.

Kategoria: klasa 7–8 szkoły podstawowej

Zadanie 5. Mniejszy okrąg jest opisany na kwadracie $ABCD$, a większy ma środek w punkcie A i promień $r = |AB| = 1$. Oblicz pole zacieniowanej na rysunku figury.



Rozwiązanie:

Ponieważ odcinki mniejszego koła uzupełniające kwadrat do koła są przystające, więc odcinki koła przylegające do boków BC i CD można zastąpić tymi, które przylegają do boków AB i DA . W ten sposób na pole zacieniowanej figury składa się $\frac{3}{4}$ większego koła oraz figura ograniczona łukiem BD większego okręgu i bokami BC i CD kwadratu. Zatem pole to jest równe $\frac{3}{4}\pi + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + 1$.