

XXII WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

Olsztyn, 29 maja 2025 r.

Kategoria: klasa 3–4 szkoły ponadpodstawowej

Zadanie 1. Z 25 małych kwadracików o rozmiarze 1×1 ułożono jeden duży kwadrat 5×5 , sklejając je ze sobą bokami jeden do drugiego. Ile kwadratów stworzono w wyniku tej konstrukcji?

Rozwiązanie:

Musimy policzyć nie tylko oryginalne małe kwadraty 1×1 , ale również wszystkie większe kwadraty, które powstają z połączenia tych małych. W konstrukcji siatki kwadratowej możemy znaleźć kwadraty różnych rozmiarów:

1. Kwadraty 1×1 : mamy ich $5 \times 5 = 25$
2. Kwadraty 2×2 : mamy ich $4 \times 4 = 16$ (bo kwadrat 2×2 może mieć lewy górny róg w dowolnym z 4×4 miejsc)
3. Kwadraty 3×3 : mamy ich $3 \times 3 = 9$
4. ...i tak dalej...

Całkowita liczba kwadratów wszystkich rozmiarów to suma:

$$25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55.$$

XXII WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

Olsztyn, 29 maja 2025 r.

Kategoria: klasa 3–4 szkoły ponadpodstawowej

Zadanie 2. Dany jest ciąg (a_n) , $n \geq 1$ określony wzorem:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}}}.$$

Oblicz sumę 2025 początkowych wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że:

$$\frac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}}} = \sqrt{n - \sqrt{n^2 - 1}}$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem możemy rozpisać:

$$n - \sqrt{n^2 - 1} = \frac{2n - 2\sqrt{n^2 - 1}}{2} = \frac{(n+1) + (n-1) - 2\sqrt{(n+1)(n-1)}}{2} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})^2}{2}$$

Zatem

$$\sqrt{n - \sqrt{n^2 - 1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})^2}{2}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{n+1}{2}} - \sqrt{\frac{n-1}{2}}.$$

Wówczas szereg zapisujemy:

$$S = \sum_{n=1}^{2025} \left(\sqrt{\frac{n+1}{2}} - \sqrt{\frac{n-1}{2}} \right) = \left(\sqrt{\frac{2}{2}} - \sqrt{\frac{0}{2}} \right) + \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) + \dots + \left(\sqrt{\frac{2026}{2}} - \sqrt{\frac{2024}{2}} \right).$$

Po skasowaniu wyrazów pozostaje

$$S = \sqrt{\frac{2025}{2}} + \sqrt{\frac{2026}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{45 + \sqrt{2026} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{44 + \sqrt{2026}}{\sqrt{2}}.$$

Upraszczając,

$$\sqrt{2026} = \sqrt{2 \cdot 1013} = \sqrt{2} \sqrt{1013},$$

więc

$$S = \sqrt{1013} + 22\sqrt{2}.$$

Ostatecznie:

$$\sum_{n=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}}} = 22\sqrt{2} + \sqrt{1013}.$$

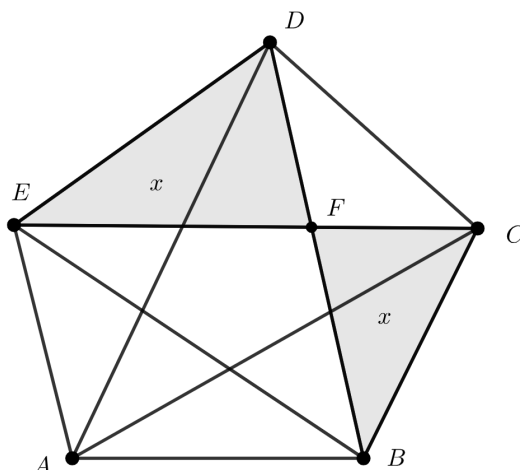
XXII WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

Olsztyn, 29 maja 2025 r.

Kategoria: klasa 3–4 szkoły ponadpodstawowej

Zadanie 3. Oblicz pole pięciokąta, wiedząc, że każda z przekątnych odcina od niego trójkąt o jednostkowym polu.

Rozwiązanie:



Ponieważ każdy bok jest wspólną podstawą dwóch trójkątów o jednakowych polach, więc ich wierzchołki leżą na prostych równoległych do boków. Stąd każda z przekątnych pięciokąta jest równoległa do łączącej z nią boku. Niech F będzie punktem przecięcia przekątnych BD i CE pięciokąta $ABCDE$. Na pole pięciokąta składają się pola trójkątów ABE , BFE , ECD i zaznaczone na rysunku x pole zacienionego trójkąta BCF . Trójkąty ABE i BFE przystają, ponieważ $ABFE$ jest równoległobokiem. Zatem pole pięciokąta jest równe $3 + x$ i pozostaje wyznaczyć x . Pole trójkąta CFD jest równe $1 - x$ i stąd dostajemy

$$\frac{x}{1-x} = \frac{S_{BCF}}{S_{CFD}} = \frac{|BF|}{|FD|} = \frac{S_{BFE}}{S_{FDE}} = \frac{1}{x},$$

ponieważ $S_{EFD} = S_{ECD} - S_{CFD} = 1 - S_{CFD} = S_{BCD} - S_{CFD} = x$. Z rozwiązania otrzymanej proporcji (związanej ze złotym podziałem) dostajemy jedyny dodatni pierwiastek równania kwadratowego $x^2 + x - 1 = 0$,

czyli $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Stąd szukane pole jest równe $3 + x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Zwracam uwagę, że rozpatrywany pięciokąt nie musi być foremny. Jeśli uczeń założy, że jest, trzeba będzie ciąć punkty.

XXII WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

Olsztyn, 29 maja 2025 r.

Kategoria: klasa 3–4 szkoły ponadpodstawowej

Zadanie 4. Niech A będzie podzbiorem zbioru $\{1, 2, \dots, 2025\}$ mającym więcej niż 1015 elementów. Udowodnij, że zbiór A zawiera potęgę dwójki lub istnieją dwa różne elementy $a, b \in A$, których suma jest potęgą dwójki.

Rozwiązanie:

Zastosujemy metodę szufladkową.

Niech

$$P = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\}$$

– zbiór wszystkich potęg dwójki nie większych od 2025. Załóżmy wprost, że A nie zawiera żadnej potęgi dwójki. Pokażemy, że wtedy w A muszą się znaleźć dwa różne elementy sumujące się do potęgi dwójki.

Rozważmy zbiór

$$X = \{1, 2, \dots, 2025\} \setminus P.$$

Każdy $x \in X$ należy do dokładnie jednego przedziału

$$(2^k, 2^{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, 10,$$

bo $2^{10} = 1024 < 2025 < 2048 = 2^{11}$.

Dla każdego $x \in X$ przyporządkujemy mu liczbę

$$y = 2^{k+1} - x,$$

gdzie k jest taki, że $2^k < x < 2^{k+1}$. Wtedy $x + y = 2^{k+1}$ jest potęgą dwójki, a ponieważ $x \notin P$, mamy także $y \neq x$. Ponadto łatwo sprawdzić, że operacja

$$x \mapsto y = 2^{k+1} - x$$

jest odwrotna do samej siebie na zbiorze X , czyli dzieli X na rozłączne pary $\{x, y\}$.

Ponieważ

$$|X| = 2025 - 11 = 2014$$

w ten sposób otrzymujemy dokładnie

$$\frac{2014}{2} = 1007$$

par dwuelementowych.

Jeśli A nie zawiera żadnej potęgi dwójki, to co najmniej dwa elementy zbioru A są w jednej parze. Zatem ich suma jest potęgą dwójki.

XXII WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

Olsztyn, 29 maja 2025 r.

Kategoria: klasa 3–4 szkoły ponadpodstawowej

Zadanie 5. Dany jest wielomian $W(x) = x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 32x - 44$.

- a) Wykaż, że liczba $\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.
b) Zbadaj, ile pierwiastków ma wielomian $W(x)$.

Rozwiązanie:

a) Oznaczmy $x = \sqrt{5} + \sqrt{3} - 2$. Wtedy (podnosząc rozsądnie do kwadratu; pomijam szczegóły techniczne), mamy kolejno:

$$x + 2 = \sqrt{5} + \sqrt{3} \Rightarrow x^2 + 4x - 4 = 2\sqrt{15} \Rightarrow x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 32x - 44 = 0.$$

b) Mamy $W'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 16x - 32$. Łatwo zauważyć, że $x = -2$ jest miejscem zerowym pochodnej. W konsekwencji $W'(x) = 4(x+2)(x^2 + 4x - 4)$. Miejscami zerowymi pochodnej są więc: $x_1 = -2 - 2\sqrt{2}$, $x_2 = -2$, $x_3 = -2 + 2\sqrt{2}$. Ze znaków pochodnej wynika, że wielomian $W(x)$ kolejno: maleje w przedziale $(-\infty, x_1]$, rośnie w $[x_1, x_2]$, maleje w $[x_2, x_3]$ i rośnie w $[x_3, \infty)$.

Teraz weźmy pod uwagę następujące fakty:

- $W(x)$ jest funkcją ciągłą
- $\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2 \in (x_3, \infty)$
- $W(x_2) = W(-2) = 4 > 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} W(x) = +\infty$.

Zatem istnieją 4 pierwiastki tego wielomianu.