

XXII WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

Olsztyn, 29 maja 2025 r.

Kategoria: klasa 1–2 szkoły ponadpodstawowej.

Zadanie 1. Niech $p > 5$ będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że liczba $(p^{12} - 65p^6 + 64)^2$ jest podzielna przez 2025.

Rozwiązanie:

Rozwiążmy zadanie używając z własności podzielności. Należy dowieść, że $(p^{12} - 65p^6 + 64)^2$ jest podzielne przez $2025 = 45^2 = 9^2 \cdot 5^2$.

Wystarczy pokazać, że wyrażenie $p^{12} - 65p^6 + 64$ jest podzielne przez $45 = 9 \cdot 5$, ponieważ wówczas jego kwadrat będzie podzielny przez $45^2 = 2025$.

Rozpocznijmy od przekształcenia wyrażenia wewnątrz nawiasu:

$$\begin{aligned} p^{12} - 65p^6 + 64 &= p^{12} - 64p^6 - p^6 + 64 = p^6(p^6 - 64) - (p^6 - 64) = (p^6 - 1)(p^6 - 64) \\ &= (p - 1)(p^2 + p + 1)(p + 1)(p^2 - p + 1)(p - 2)(p^2 + 2p + 4)(p + 2)(p^2 - 2p + 4) \end{aligned}$$

Rozważmy iloczyn $A = (p - 2)(p + 2)(p - 1)(p + 1)$.

Ponieważ z założenia, p nie jest podzielne przez 5, więc A jest podzielne przez 5, ponieważ wśród pięciu kolejnych liczb całkowitych większych niż 5 jedna z nich powinna być podzielna przez 5.

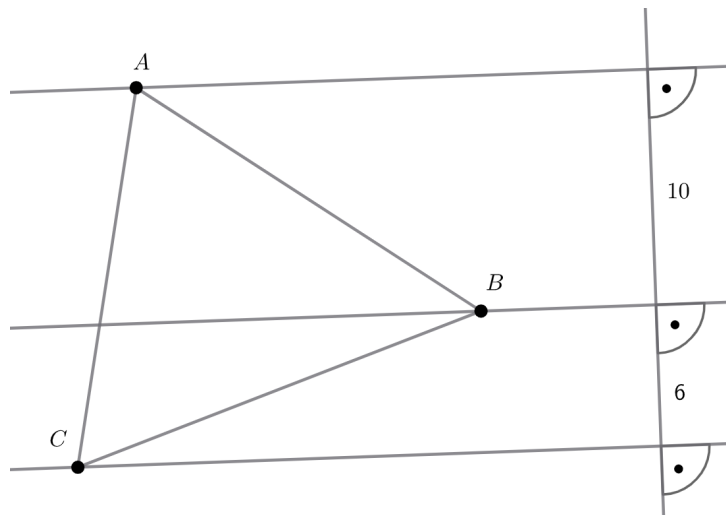
Ponadto, ponieważ p nie dzieli się przez 3, więc w iloczynie A muszą być dwie liczby podzielne przez 3. Zatem p jest podzielne przez 9.

XXII WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

Olsztyn, 29 maja 2025 r.

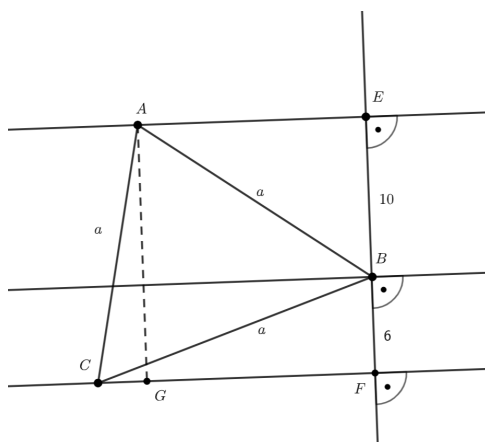
Kategoria: klasa 1–2 szkoły ponadpodstawowej.

Zadanie 2. Oblicz pole trójkąta równobocznego ABC przedstawionego na rysunku:



Rozwiązanie:

Przesuńmy wierzchołek B na prostą prostopadłą. Otrzymamy kilka trójkątów prostokątnych.



Z twierdzenia Pitagorasa mamy:
$$\begin{cases} |AE|^2 + 10^2 = a^2 \\ |CF|^2 + 6^2 = a^2 \\ |CG|^2 + 16^2 = a^2 \end{cases} \quad \text{oraz wiemy, że } |AE| = |FG|$$

oraz $|CG| + |FG| = |CF|$.

Zapiszmy to następująco:

$$\begin{cases} x^2 + 100 = a^2 \\ y^2 + 36 = a^2 \\ (y - x)^2 + 256 = a^2 \end{cases}$$

Z ostatniego równania mamy:

$$a^2 = (y - x)^2 + 256 = y^2 - 2xy + x^2 + 256 = (a^2 - 100) - 2xy + (a^2 - 36) + 256$$

Zatem

$$0 = a^2 - 2xy + 120$$

czyli

$$2xy = a^2 + 120$$

Podnieśmy stronami do kwadratu:

$$4x^2y^2 = a^4 + 240a^2 + 14400$$

$$4(a^2 - 100)(a^2 - 36) = a^4 + 240a^2 + 14400$$

$$4a^2 - 544a^2 + 14400 = a^4 + 240a^2 + 14400$$

$$3a^4 = 784a^2$$

Ale a jest dodatnie, zatem $a^2 = \frac{784}{3}$ i $P = \frac{196\sqrt{3}}{3}$.

XXII WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

Olsztyn, 29 maja 2025 r.

Kategoria: klasa 1–2 szkoły ponadpodstawowej.

Zadanie 3. Dwaj bracia mają do dyspozycji jeden rower. Chcą dojechać do domu ciotki oddalonego o 10 km. Wiadomo, że naraz tylko jeden z nich może jechać na rowerze. Każdy z nich idzie pieszo z prędkością 5 km/h, a na rowerze jedzie 20 km/h. Jaki jest najkrótszy czas dotarcia braci do ciotki?

Rozwiązanie:

Niech x będzie taki, że:

- Pierwszy brat (A) jedzie na rowerze odległość x , następnie idzie pieszo odległość $(10 - x)$,
- drugi brat (B) idzie pieszo odległość x , następnie jedzie na rowerze odległość $(10 - x)$.

Czas podróży brata A:

$$t_A = \frac{x}{20} + \frac{10 - x}{5}$$

Czas podróży brata B:

$$t_B = \frac{x}{5} + \frac{10 - x}{20}$$

Musi zachodzić $t_A = t_B$:

$$\frac{x}{20} + \frac{10 - x}{5} = \frac{x}{5} + \frac{10 - x}{20}$$

$$x + 4(10 - x) = 4x + (10 - x)$$

$$x + 40 - 4x = 4x + 10 - x$$

$$-3x + 40 = 3x + 10$$

$$30 = 6x$$

$$x = 5 \text{ km}$$

Wtedy:

$$t_A = \frac{5}{20} + \frac{5}{5} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \text{ h}$$

$$t_B = \frac{5}{5} + \frac{5}{20} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \text{ h}$$

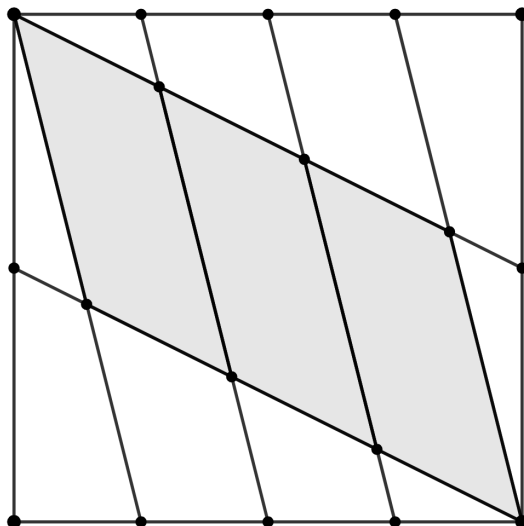
Najkrótszy czas dotarcia braci do ciotki wynosi: 75 minut.

XXII WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

Olsztyn, 29 maja 2025 r.

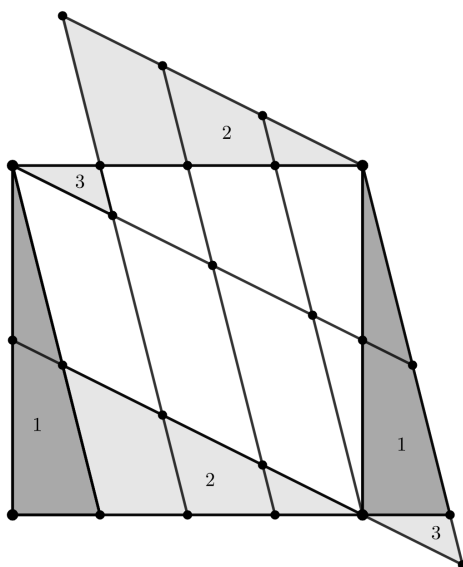
Kategoria: klasa 1–2 szkoły ponadpodstawowej.

Zadanie 4. Przeciwległe boki kwadratu podzielono odpowiednio na dwie i cztery równe części, a następnie kwadrat podzielono odcinkami jak na rysunku otrzymując trójkąty i czworokąty, w tym trzy przystające równoległoboki (zacięniowane). Jaką część pola wyjściowego kwadratu jest pole jednego z tych równoległoboków?



Rozwiązanie:

Odcinamy od wyjściowego kwadratu kolejno czerwony (1), zielony (2) i niebieski (3) trójkąt. Przesuwamy je tak, jak na rysunku i otrzymujemy wklęsły sześciokąt składający się z siedmiu przystających równoległoboków. Zatem szukane pole to $\frac{1}{7}$ pola kwadratu.



XXII WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

Olsztyn, 29 maja 2025 r.

Kategoria: klasa 1–2 szkoły ponadpodstawowej.

Zadanie 5. Rozwiąż równanie

$$x^4 + (5 - a^2)x^2 - 3ax + 4 = 0$$

w zależności od parametru a .

Rozwiązanie:

Zaczynamy od przekształcenia równania względem parametru a . Mamy

$$x^4 + (5 - a^2)x^2 - 3ax + 4 = 0$$

przepisane jako równanie kwadratowe w a :

$$x^2 a^2 + 3x a - (x^4 + 5x^2 + 4) = 0.$$

Następnie obliczamy pierwiastki tej równania względem a .

$$\Delta = (3x)^2 + 4x^2(x^4 + 5x^2 + 4) = 4x^6 + 20x^4 + 25x^2 = x^2(2x^2 + 5)^2,$$

stąd

$$a = \frac{-3x \pm |x|(2x^2 + 5)}{2x^2} \implies a = \frac{x^2 + 1}{x} \quad \text{lub} \quad a = -\frac{x^2 + 4}{x}.$$

Mamy więc:

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \quad x_{3,4} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{2}.$$

Wtedy

$$a^2 - 4 \geq 0 \iff |a| \geq 2, \quad a^2 - 16 \geq 0 \iff |a| \geq 4.$$

Stąd

1) $|a| < 2$: brak rozwiązań rzeczywistych.

$$2) |a| = 2 \implies x = \pm 1.$$

$$3) 2 < |a| < 4 \implies x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

$$4) |a| = 4 \implies x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \quad x_{3,4} = \mp 2.$$

$$5) |a| > 4 \implies x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \quad x_{3,4} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{2}.$$