XXI WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
Olsztyn, 24 maja 2024 r.
Kategoria: klasa 3–4 szkoły ponadpodstawowej

Zadanie 1. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych n podzielnych przez 7, które spełniają warunek:

$$\log_2 2n + \log_4 4n + \log_8 8n < 14.$$

Rozwiązanie:

$$\log_2 2 + \log_2 n + \log_4 4 + \log_4 n + \log_8 8 + \log_8 n < 14$$

$$1 + \log_2 n + 1 + \frac{\log_2 n}{\log_2 4} + 1 + \frac{\log_2 n}{\log_2 8} < 14$$

$$3 + \log_2 n + 1 + \frac{\log_2 n}{2} + \frac{\log_2 n}{3} < 14$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \log_2 n < 11$$

$$\frac{11}{6} \log_2 n < 11$$

$$\log_2 n < 6$$

$$n < 64$$

Suma wszystkich liczb naturalnych$n < 64$ podzielnych przez 7:$7 + 14 + 21 + 28 + 35 + 42 + 49 + 56 + 63 = 315$.

XXI WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
Olsztyn, 24 maja 2024 r.
Kategoria: klasa 3–4 szkoły ponadpodstawowej

Zadanie 2. Dla jakich wartości parametru α równanie

$$(1-\sin\alpha)x^2 - 4x + 1 - \sin\alpha = 0, \qquad 1-\sin\alpha \neq 0,$$

ma dwa różne pierwiastki?
Rozwiązanie:
Mamy, że $1-\sin\alpha \in (0,2\rangle$, więc przyjmijmy: $t = 1-\sin\alpha \in (0,2\rangle$.
Wtedy:

$$tx^2 - 4x + t = 0$$

$$\Delta = 16 - 4t^2 > 0$$

$$4(4-t^2) > 0$$

$$(2-t)(2+t) > 0, \quad t \in (0,2\rangle$$

Zatem

$$t \in (0,2).$$

$$1-\sin\alpha \in (0,2)$$

$$1-\sin\alpha > 0 \text{ oraz } 1-\sin\alpha < 2$$

$$\sin\alpha < 1 \text{ oraz } \sin\alpha > -1$$

$$\sin\alpha \neq -1 \text{ oraz } \sin\alpha \neq 1$$

Ostatecznie:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

XXI WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
Olsztyn, 24 maja 2024 r.
Kategoria: klasa 3–4 szkoły ponadpodstawowej

Zadanie 3. Wykaż, że liczba

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

jest całkowita.

Rozwiązanie: Niech $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=k$. Wtedy, równoważnie:

$$\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^3 = k^3$$

$$4+3\left(\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})^2(2-\sqrt{5})}+\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})^2}\right) = k^3$$

$$4-3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) = k^3$$

$$W(k) = k^3+3k-4=0$$

Dalej, zapisując wielomian $W(k)$ w postaci $W(x)=(k-1)(k^2+k+4)$, stwierdzamy, że liczba k jest całkowita i wynosi 1.

XXI WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
Olsztyn, 24 maja 2024 r.
Kategoria: klasa 3–4 szkoły ponadpodstawowej

Zadanie 4. Punkt K leży wewnątrz trójkąta ABC. Wykaż, że

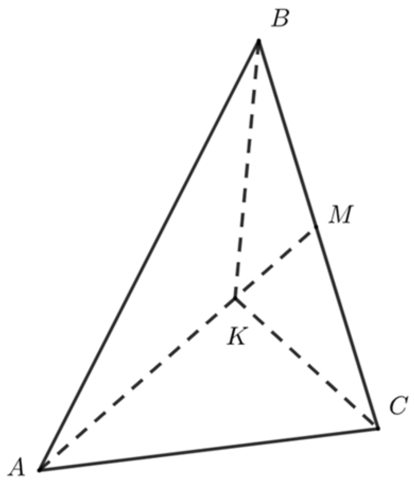
$$|AK| + |BK| < |AC| + |BC|.$$

Rozwiązanie: Niech M oznacza przecięcie prostej AK z prostą BC. Z nierówności trójkąta otrzymujemy:

$$|AC| + |CM| > |AM| = |AK| + |KM|$$
$$|KM| + |MB| > |KB|$$

Dodając stronami:

$$|AC| + |CM| + |KM| + |MB| > |AK| + |KM| + |KB|$$
$$|AC| + |CM| + |MB| > |AK| + |KB|$$
$$|AC| + |BC| > |AK| + |KB|$$



XXI WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
Olsztyn, 24 maja 2024 r.
Kategoria: klasa 3–4 szkoły ponadpodstawowej

Zadanie 5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\angle ACB = 45°$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC (ortocentrum). Prosta przechodząca przez punkt O i prostopadła do prostej CO przecina prostą AC i BC odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że

$$|OK| + |KH| = |OL| + |LH|.$$

Rozwiązanie:

Niech D będzie spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka B, niech E będzie spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C i niech G będzie punktem symetrycznym do punktu H względem prostej AC; odcinki BG i AC przecinają się w punkcie D. Zauważmy, że $BH \perp AC$, $CH \perp AB$.

Ponadto mamy

$$\angle ACG = \angle ACH \quad \text{(z własności symetrii)},$$

$$\angle ACG = \angle ABG \quad \text{(z podobieństwa trójkątów DGC, DHC, AEC, ABD)},$$

Więc punkty A, B, C, G leżą na jednym okręgu (twierdzenie odwrotne do twierdzenia o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku).

W trójkącie BCD zachodzą równości $\angle BCD = 45°$ i $\angle BDC = 90°$, skąd wyznaczamy $\angle CBG = 45°$. Zatem $\angle GOC = 2\angle GBC = 90°$ (kąt środkowy i wpisany oparty na tym samym łuku). Stąd $GO \perp CO$, toteż punkty G,K,O leżą na jednej prostej w tej właśnie kolejności. Wobec tego

$$|OK| + |KH| = |OK| + |KG| = |OG|,$$

czyli $|OK| + |KH|$ jest równa promieniowi okręgu opisanego na trójkącie ABC. Analogicznie dowodzimy, że temu promieniowi jest równa $|OL| + |LH|$.

Uwaga: Rysunek poglądowy pokazujący docelowy (a nie początkowy) rozkład punktów.