XXI WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
Olsztyn, 24 maja 2024 r.
Kategoria: klasa 1–2 szkoły ponadpodstawowej.

Zadanie 1. Oblicz:

$$\sqrt{1+2025\cdot\sqrt{1+2024\cdot\sqrt{1+2023\cdot\sqrt{1+2022\cdot 2020}}}}$$

Rozwiązanie: Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia możemy zapisać:

$$2022\cdot 2020=(2021+1)\,(2021-1)=2021^2-1,$$

stąd

$$\sqrt{1+2022\cdot 2020}=\sqrt{1+2021^2-1}=2021.$$

Postępując analogicznie można doprowadzić wyrażenie podane w zadaniu do postaci

$$\sqrt{1+2025\cdot 2023}=2024.$$

XXI WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
Olsztyn, 24 maja 2024 r.
Kategoria: klasa 1–2 szkoły ponadpodstawowej.

Zadanie 2. Dane są trzy wiadra o pojemności 3 litry, 5 litrów oraz 8 litrów. Ostatnie wiadro 8-litrowe jest wypełnione wodą do pełna. Przelewając wodę pomiędzy wiadrami należy odmierzyć dwie równe porcje wody po 4 litry. Wiadra nie mają miarek pośrednich, można przelewać jedynie do pełności wiadra, aby wiedzieć ile przelano.

W odpowiedzi zapisz ciąg kolejnych kroków prowadzący do docelowego stanu wiader.

Rozwiązanie:

- Stan początkowy 0/3, 0/5, 8/8.
- Uzupełniamy do pełna średnie wiadro uzupełniając z dużego.
- Stan: 0/3, 5/5, 3/8.
- Uzupełniamy najmniejsze wiadro odlewając ze średniego.
- Stan: 3/3, 2/5, 3/8.
- Z małego przelewamy do największego.
- Stan: 0/3, 2/5, 6/8.
- Ze średniego przelewamy do małego.
- Stan 2/3, 0/5, 6/8.
- Z największego przelewamy do średniego.
- Stan 2/3, 5/5, 1/8.
- Ze średniego przelewamy do małego.
- Stan 3/3, 4/5, 1/8.
- Z małego przelewamy do największego.
- Stan 0/3, 4/5, 4/8.

XXI WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
Olsztyn, 24 maja 2024 r.
Kategoria: klasa 1–2 szkoły ponadpodstawowej.

Zadanie 3. Niech punkt D będzie środkiem boku BC trójkąta ABC. Wykaż, że:

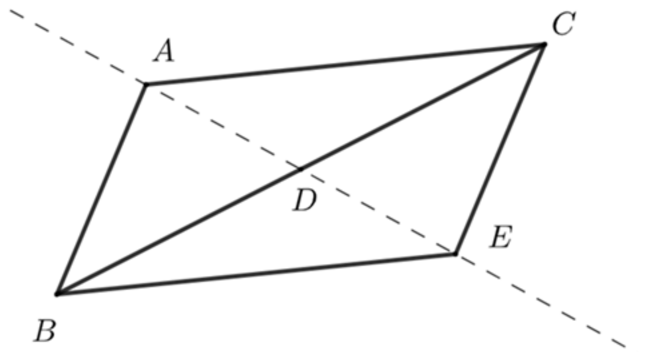
$$|AD| < \frac{|AB| + |AC|}{2}.$$

Rozwiązanie: Wykonując symetrię środkową punktu A o środku D otrzymujemy E. Wtedy czworokąt ABCE jest równoległobokiem. Wtedy z nierówności trójkąta:

$$|AC| + |CE| > |AE| = 2 \cdot |AD|$$

ale $|CE| = |AB|$, zatem

$$|AC| + |AB| > 2 \cdot |AD|.$$



XXI WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
Olsztyn, 24 maja 2024 r.
Kategoria: klasa 1–2 szkoły ponadpodstawowej.

Zadanie 4. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych takich, że:

$$xy - 2x - 3y = 4.$$

Rozwiązanie:
Dodajemy 6 do obu stron równania:

$$xy - 2x - 3y + 6 = 10$$

Teraz zauważmy, że lewą stronę można przekształcić, używając wspólnego czynnika:

$$xy - 2x - 3y + 6 = x(y - 2) - 3(y - 2) = (x - 3)(y - 2)$$

Teraz mamy równanie:

$$(x - 3)(y - 2) = 10$$

Teraz musimy znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych $(x-3)$ i $(y-2)$, których iloczyn wynosi 10. Dzielniki liczby 10 to: $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$.

1. $x - 3 = 1$, $y - 2 = 10$
2. $x - 3 = 10$, $y - 2 = 1$
3. $x - 3 = -1$, $y - 2 = -10$
4. $x - 3 = -10$, $y - 2 = -1$
5. $x - 3 = 2$, $y - 2 = 5$
6. $x - 3 = 5$, $y - 2 = 2$
7. $x - 3 = -2$, $y - 2 = -5$
8. $x - 3 = -5$, $y - 2 = -2$

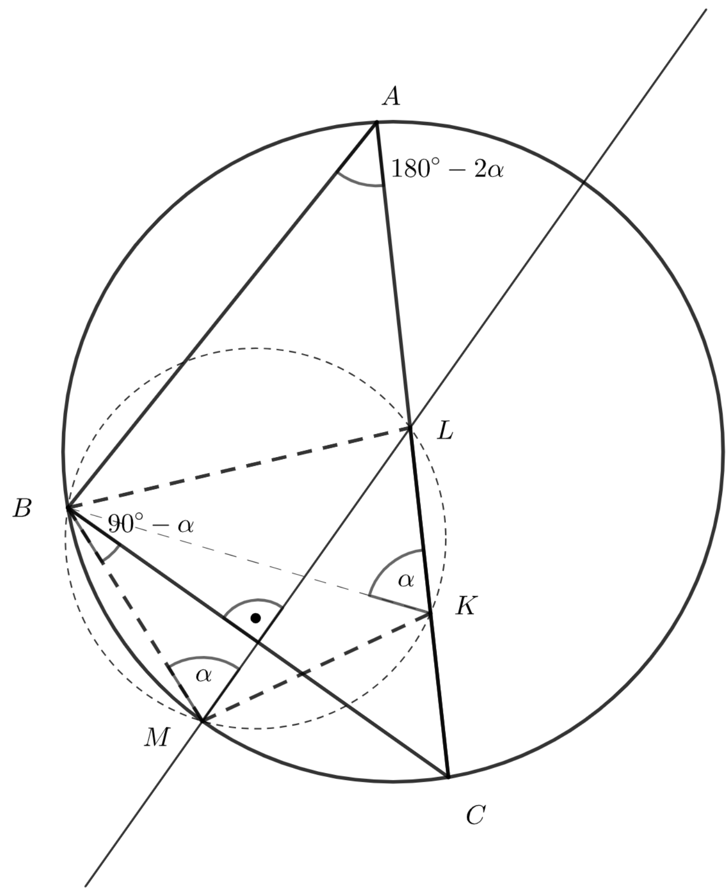
Teraz przekształćmy każdą parę z powrotem do wartości x i y:

1. $x = 4$, $y = 12$
2. $x = 13$, $y = 3$
3. $x = 2$, $y = -8$
4. $x = -7$, $y = 1$
5. $x = 5$, $y = 7$
6. $x = 8$, $y = 4$
7. $x = 1$, $y = -3$
8. $x = -2$, $y = 0$

XXI WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
Olsztyn, 24 maja 2024 r.
Kategoria: klasa 1–2 szkoły ponadpodstawowej.

Zadanie 5. W trójkącie ABC na boku AC istnieją takie punkty K i L, że $AB = AK$ i $BL = LC$ (punkt L leży między punktami A i K). Punkt M jest środkiem łuku BC, niezawierającego punktu A, okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykazać, że punkty B, L, K i M leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:



Niech $\angle BKA = \alpha$. Wtedy $\angle BAK = 180° - 2\alpha$ oraz

$$\angle CBM = \frac{1}{2}\angle CAB = 90° - \alpha.$$

Punkty L i M są jednakowo oddalone od punktów B i C, dlatego prosta LM jest symetralną odcinka BC, stąd

$$\angle BML = 90° - \angle CBM = \alpha.$$

Zatem $\angle BKL = \alpha = \angle BML$, więc na pomocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku punkty B, L, K, M leżą na jednym okręgu.