XXI WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
Olsztyn, 24 maja 2024 r.
Kategoria: klasa 7–8 szkoły podstawowej

Zadanie 1. Uzasadnij, że suma $2^{15}+2^{16}+2^{17}+2^{18}$ jest podzielna przez 120.
Rozwiązanie: Przekształćmy wyrażenie:

$$2^{15}+2^{16}+2^{17}+2^{18}=2^{15}(1+2^1+2^2+2^3)=2^{15}\cdot(1+2+4+8)=2^{15}\cdot 15=$$

$$=2^{12}\cdot 8\cdot 15=2^{12}\cdot 120.$$

XXI WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
Olsztyn, 24 maja 2024 r.
Kategoria: klasa 7–8 szkoły podstawowej

Zadanie 2. W pewnym mieście w Szwajcarii ludność mówi w co najmniej jednym języku: niemieckim lub francuskim, przy czym 80% ludności umie mówić po niemiecku, a 70% ludności po francusku. Jaki procent ludności tego miasta umie mówić w obu językach?

Rozwiązanie: Niech $x\%$ oznacza procent ludności miasta, które umie mówić w obu językach. Wtedy:
$80\% - x\%$ ludności umie mówić tylko po niemiecku,
$70\% - x\%$ ludności umie mówić tylko po francusku.
Wobec tego mamy równanie:

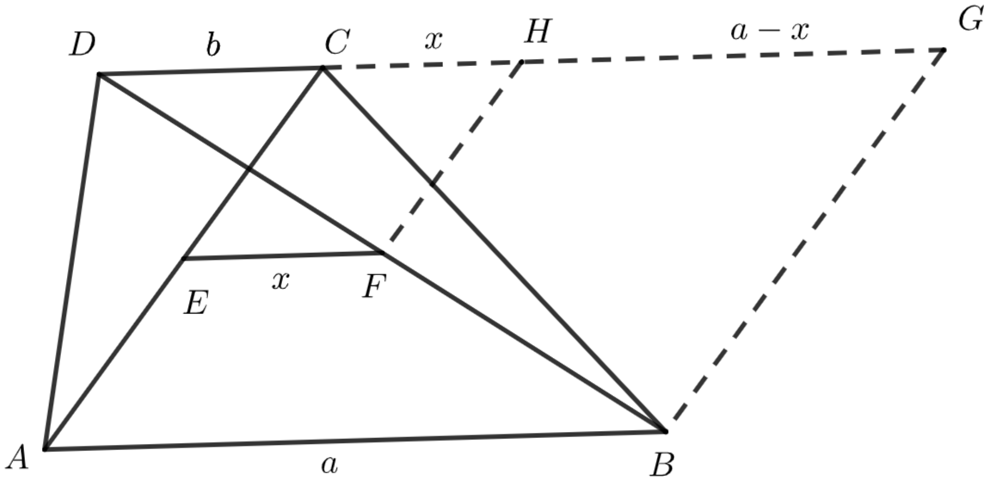
$$x\% + (80\% - x\%) + (70\% - x\%) = 100\%$$

Stąd $x = 50\%$.

XXI WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
Olsztyn, 24 maja 2024 r.
Kategoria: klasa 7–8 szkoły podstawowej

Zadanie 3. Dany jest trapez o podstawach długości a i b ($a > b$). Wyznacz odległość środków przekątnych tego trapezu.

Rozwiązanie: Mamy rysunek:



Oznaczmy przez E środek odcinka AC oraz przez F środek odcinka BD. Szukaną długość odcinka EF oznaczmy przez x.

Czworokąt $ABGC$ jest równoległobokiem i czworokąt $EFHC$ jest równoległobokiem. Ponieważ F jest środkiem odcinka BD, to H jest środkiem odcinka DG. Zatem

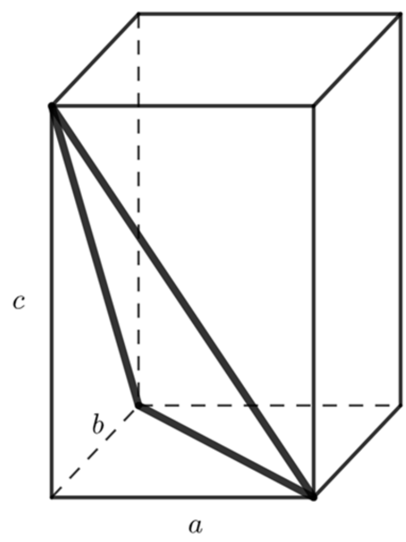
$$x = CG - HG = a - HG$$

oraz $DH = HG$, czyli $b + x = HG$. Z tych równości wynika, że $x = a - (b + x)$, skąd $x = \frac{a-b}{2}$.

XXI WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
Olsztyn, 24 maja 2024 r.
Kategoria: klasa 7–8 szkoły podstawowej

Zadanie 4. Wyznacz objętość prostopadłościanu mając dane długości przekątnych jego ścian $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{13}$.

Rozwiązanie: Niech a, b, c będą długościami krawędzi trzech wzajemnie prostopadłych ścian prostopadłościanu.



Wtedy mamy równości:

$$a^2 + b^2 = (\sqrt{5})^2, \quad b^2 + c^2 = (\sqrt{10})^2, \quad c^2 + a^2 = (\sqrt{13})^2$$

Stąd

$$a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 = 5 + 10 + 13,$$

czyli

$$a^2 + b^2 + c^2 = 14$$

Zatem

$$a^2 + 10 = 14, \quad b^2 + 13 = 14, \quad c^2 + 5 = 14.$$

Stąd $a = 2, b = 1, c = 3$. Wobec tego objętość prostopadłościanu wynosi:

$$V = abc = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6.$$

XXI WARMIŃSKO-MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE
Olsztyn, 24 maja 2024 r.
Kategoria: klasa 7–8 szkoły podstawowej

Zadanie 5. Samochód ciężarowy przewozi codziennie towar z hurtowni do sklepu. Kierowca trzyma poza pracą niezaładowany samochód na parkingu przed hurtownią. Gdy jedzie załadowanym samochodem, to porusza się z prędkością $45\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Samochodem bez ładunku jedzie z prędkością $48\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Załadowanie samochodu trwa 35 min, a jego rozładowanie 20 min. Wykonanie pięciu pełnych kursów z załadunkiem i rozładunkiem zajmuje kierowcy dokładnie 8 godzin. Jak daleko jest z hurtowni do sklepu?

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech: s – odległość między hurtownią a sklepem.

W ciągu 8 godzin samochód wykona 5 kursów, czyli

$$5 \cdot \left(\frac{s}{45} + \frac{s}{48} + \frac{55}{60}\right) = 8$$

Stąd $s = 15\frac{27}{31}$[km].