Kategoria szkoła podstawowa, klasa VII - rozwiązania:

Zadanie 1. Znaleźć 7 kolejnych liczb naturalnych, których suma wynosi 2023.

Niech to będą liczby x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5, x+6 gdzie x jest liczbą naturalną. Wtedy x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)+(x+6) = 7x+21 = 7(x+3) = 2023,
x + 3 = 2023:7 = 289,
x = 286.
Odpowiedź: 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292.

Zadanie 2. Znajdź wszystkie 4-cyfrowe liczby postaci XXYY (liczby, których dwie pierwsze i dwie ostatnie cyfry są takie same), które są kwadratem liczby naturalnej.

Niech ab będzie 2-cyfrową liczbą naturalną, taką, że $XXYY = (10a + b)^2$. Stąd Y jest ostatnią cyfrą kwadratu jednocyfrowej liczby naturalnej. Mamy Y = 0, 1, 4, 5, 6, 9. Ponadto

$$1000X + 100X + 10Y + Y = 11(100X + Y).$$

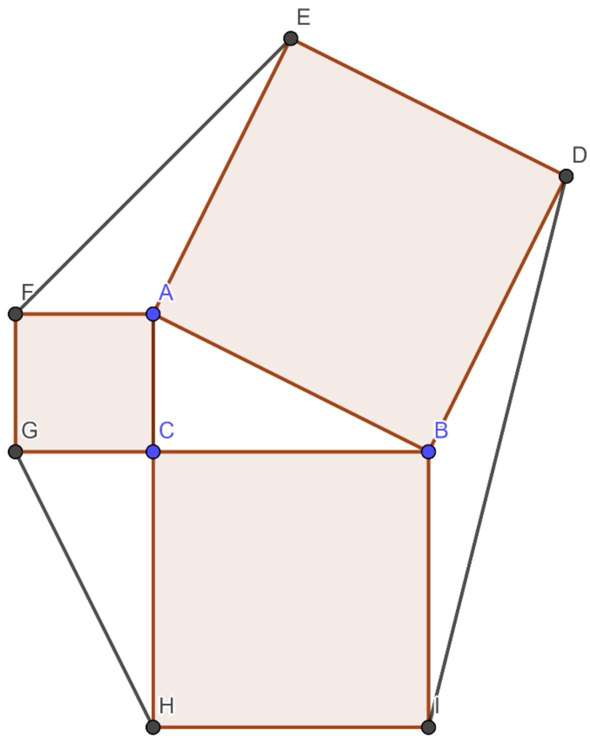
Zatem $100X + Y$ dzieli się bez reszty przez 11. Biorąc po uwagę te dwa fakty otrzymujemy następujące możliwości dla pary (X, Y): (2,9), (5,6), (6,5) oraz (7,4). Zauważmy także, że

$$\frac{100X + Y}{11}$$

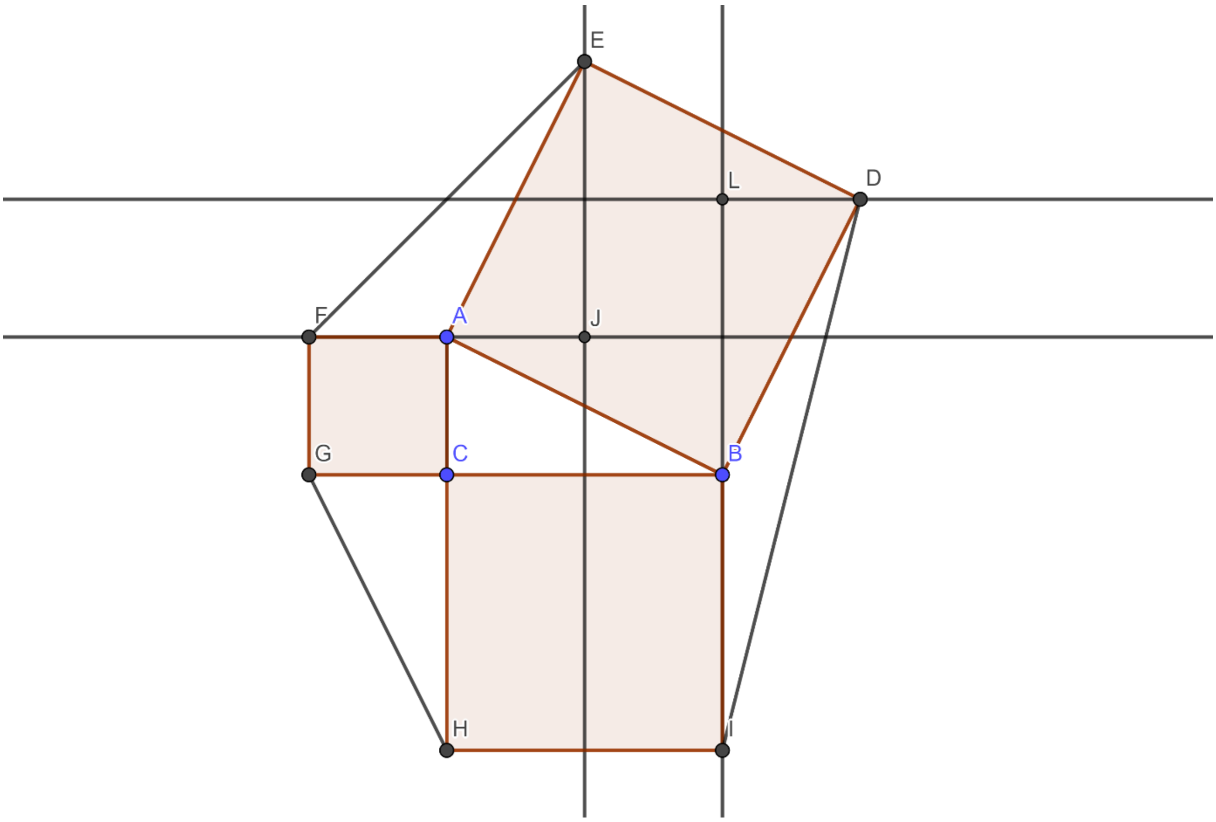
też musi być kwadratem liczby naturalnej. Otrzymujemy X=7, Y=4.

Odpowiedź: Tylko liczba 7744 jest kwadratem liczby naturalnej (88).

Zadanie 3. Wykazać, że dorysowane do ilustracji twierdzenia Pitagorasa trójkąty AEF, BID oraz CGH mają równe pola.

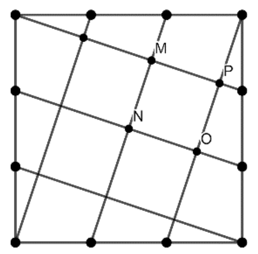


Rozwiązanie:

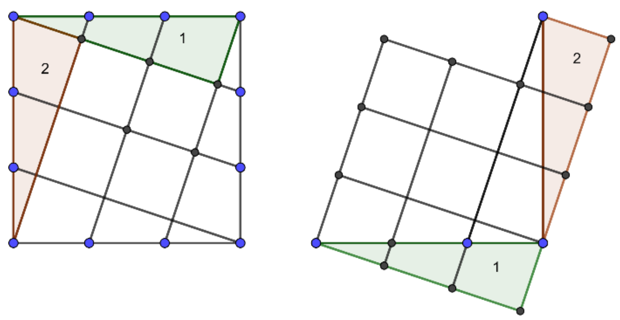


Trójkąt *GHC* przystaje do trójkąta *ABC* (ma przyprostokątne tej samej długości co *ABC*). Po przedłużeniu stosownych odcinków (jak na rysunku) otrzymujemy przystające do *ABC* trójkąty *AEJ* i *DBL*. Dla trójkąta *AEJ* mamy $|AE|=|AB|$ i $|\angle EAJ| = 90° - |\angle JAB| = |\angle BAC|$. Przystawanie *DBL* do *ABC* pokazuje się analogicznie. Ponieważ *EJ* jest wysokością trójkąta *FAE* więc jego pole jest równe $\frac{1}{2} \cdot |FA| \cdot |EJ| = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |AB|$. Analogicznie dla *DLB*.

Zadanie 4. Boki kwadratu podzielono na trzy równe części, a następnie kwadrat podzielono liniami jak na rysunku. Jaką częścią pola wyjściowego kwadratu jest pole kwadratu MNOP?



Rozwiązanie:

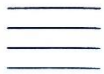


Odcięcie od kwadratu trójkątów (1) i (2) oraz doklejenie ich do pozostałości po kwadracie tak, jak na rysunku daje figurę złożoną z 10 kwadracików przystających do *MNOP*. Zatem pole *MNOP* jest $\frac{1}{10}$ pola wyjściowego kwadratu.

Zadanie 5. Ile punktów przecięcia mogą mieć cztery różne proste na płaszczyźnie? Rozważ i narysuj wszystkie przypadki.

Należy uważać, aby nie przeoczyć żadnego przypadku. Niektóre proste mogą być równoległe, a niektóre mogą mieć wspólny punkt przecięcia. Ważne jest systematyczne uporządkowanie wszystkich możliwych przypadków.

Najpierw rozważymy sytuacje, w których występuje pewna liczba prostych równoległych. Mogą być cztery następujące przypadki:



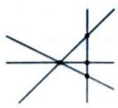
- Wszystkie cztery proste są do siebie równoległe – mamy 0 punktów przecięcia.
- Trzy proste są do siebie równoległe, a czwarta prosta przecina każdą z prostych równoległych w jednym punkcie – mamy 3 punkty przecięcia.
- Proste mogą być parami równoległe (2 pary takich prostych) – mamy 4

punkty przecięcia.
- Dwie proste są równoległe, a pozostałe dwie nie są do nich równoległe i przecinają się w jednym punkcie, dla którego możliwe są dwa podprzypadki:
    - Punkt przecięcia leży na jednej z prostych równoległych – mamy

wtedy łącznie 3 punkty przecięcia.
    - Punkt przecięcia nie leży na żadnej z prostych równoległych – mamy wtedy łącznie 5 punktów przecięcia.

W pozostałych przypadkach żadne dwie z naszych czterech prostych nie są równoległe. W takiej sytuacji zwracamy uwagę na to, ile prostych może przechodzić przez jeden punkt. Mogą być trzy następujące przypadki:

- Wszystkie cztery proste przechodzą przez jeden punkt – mamy 1 punkt przecięcia.
- Trzy proste przechodzą przez jeden punkt, a czwarta, która nie jest



  równoległa do żadnej z nich, przecina każdą z nich w jednym punkcie – mamy 4 punkty przecięcia.
- Żadne trzy z naszych prostych nie przechodzą przez jeden punkt, i w naszej sytuacji żadne dwie nie są równoległe, czyli każda z każdą przecina się w innym punkcie – mamy 6 punktów przecięcia.
  Podsumowując cztery różne proste na płaszczyźnie mogą mieć 0, 1, 3,

  4, 5 lub 6 punktów przecięcia