Rozwiązania: kategoria liceum 3-4

Zadanie 1. Czy można przedstawić liczbę C jako sumę 17 kolejnych liczb naturalnych?

a) Jeśli $C = 2023^{2022}$,
b) Jeśli $C = 2022^{2023}$

Rozwiązanie:

Niech to będą liczby $x, x+1, x+2, \dots, x+16$ gdzie x jest liczbą naturalną. Wtedy

a) $x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + \cdots + (x+16) = 17x + 136 = 17(x+8) = 2023^{2022}$.
Liczba 2023 ma dzielnik 17 oraz liczba 2023^{2022} ma dzielnik 17. Dlatego równanie $17(x+8) = 2023^{2022}$ ma rozwiązanie w liczbach naturalnych.

b) $x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + \cdots + (x+16) = 17x + 136 = 17(x+8) = 2022^{2023}$. Liczba 17 nie jest dzielnikiem ani liczby 2022 ani liczby 2022^{2023}. Dlatego równanie $17(x+8) = 2022^{2023}$nie ma rozwiązania w liczbach naturalnych.

Odpowiedź: a) TAK, b) NIE

Zadanie 2. Funkcja $f: R \to R$ jest ściśle rosnąca w swojej dziedzinie i dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełnia następujący warunek $f(x \cdot f(x) + y) = f(x^2) + f(y)$. Znaleźć wszystkie takie funkcje.

Rozwiązanie:

Niech

$$x = 0.$$

Wtedy równanie

$$f(x \cdot f(x) + y) = f(x^2) + f(y).$$

przyjmuje postać

$$f(y) = f(0) + f(y),$$

czyli wiemy już, że funkcja f ma własność

$$f(0) = 0.$$

Dalej, kładąc $y = 0$, dostajemy

$$f\big(x \cdot f(x)\big) = f(x^2).$$

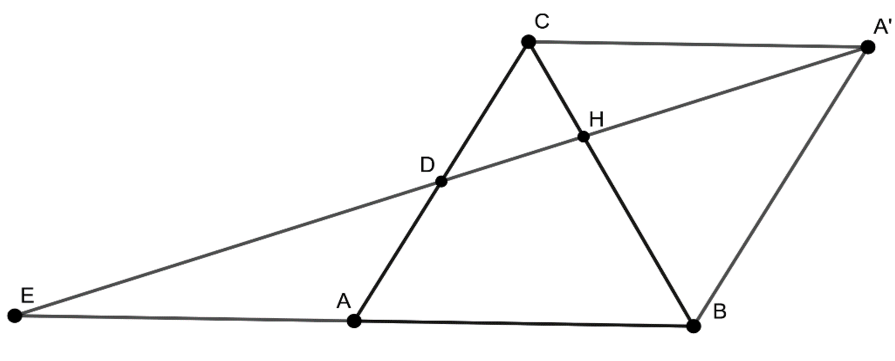
Ponieważ f jest funkcją ściśle rosnąca, to

$$x \cdot f(x) = x^2$$

Zatem $f(x) = x$. Łatwo sprawdzić, że funkcja ta spełnia warunki zadania.

Zadanie 3. Pająk porusza się po ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, którego wszystkie krawędzie są tej samej długości. Startuje ze środka krawędzi bocznej, jego celem jest najdalszy wierzchołek podstawy. Jaki kierunek powinien wybrać, żeby przebyta droga była najkrótsza? Określi¢ w jakim stosunku taka droga przetnie mijaną przez pająka krawędź.

Rozwiązanie:



Po rozłożeniu dwóch sąsiednich ścian bocznych ostrosłupa na płaszczyźnie dostajemy równoległobok ABA’C, gdzie A’ odpowiada wierzchołkowi podstawy, który znajduje się najdalej od środka D krawędzi bocznej AC. Na płaszczyźnie najkrótszą drogą jest odcinek DA’. Pająk powinien więc kierować się na punkt H krawędzi BC. Biorąc punkt E przecięcia prostych AB i DA’ dostajemy trójkąty EBH i A’CH podobne w skali 2. Stąd wynika, że punkt D dzieli krawędź CB w stosunku 1:2.

Zadanie 4. Mamy 25 liczb. Wiadomo, że suma każdych czterech z nich jest dodatnia. Uzasadnić, że suma wszystkich liczb jest dodatnia.

Rozwiązanie:
Ponieważ suma każdych czterech jest dodatnia, więc ujemnych nie może być więcej niż 3. Biorąc więc te trzy liczby oraz jedną liczbę dodatnią, otrzymujemy sumę dodatnią. Skoro pozostałe liczby są dodatnie, to suma wszystkich liczb jest dodatnia.

Zadanie 5. Pokazać, że wszystkie liczby

$$a_n = \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n, n \in N$$

są naturalne.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{26+6\sqrt{17}}{4} = \frac{13+3\sqrt{17}}{2} = 2 + 3 \cdot \frac{3+\sqrt{17}}{2}.$$

Stąd wynika, że

$$\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{n+2} = \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{n+1}.$$

Taką samą zależność dostajemy dla wyrażenia

$$\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^{n+2}.$$

Zatem wyrazy ciągu spełniają zależność

$a_{n+2} = 3 \cdot a_{n+1} + 2 \cdot a_n$ dla dowolnego n.

Ponieważ $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, więc wszystkie a_n są naturalne.