Kategoria szkoła średnia, klasy 1-2: rozwiązania

1. Znaleźć 17 kolejnych liczb naturalnych, których suma wynosi 2023.

   Rozwiązanie: Niech to będą liczby
   $x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5, x+6, \ldots, x+16$ gdzie x jest liczbą naturalną.
   Wtedy
   $x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)+(x+6)+\cdots+(x+16) = 17x+136 = 17(x+8) = 2023$,
   $x + 8 = 2023 : 17 = 119$,
   $x = 111$
   Odpowiedź: 111, 112, 113, 114, . . . , 127.

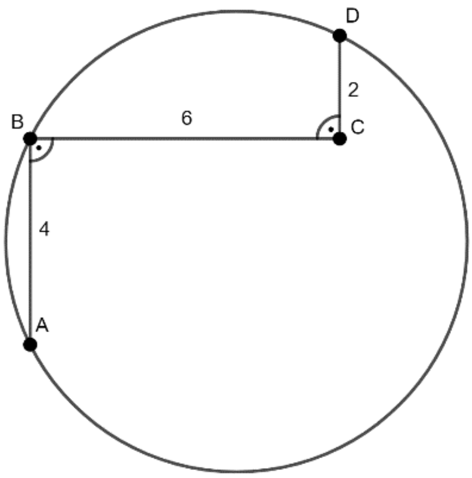
2. Na tablicy wypisujemy liczby od 1 do 2023. Losowo wybieramy dwie liczby, wycieramy je z tablicy, a do liczb, które zostały dopisujemy różnicę tych wytartych. Uzyskujemy w ten sposób ciąg liczb
   o jedną liczbę mniejszy. Czynność powtarzamy, aż do momentu, gdy na tablicy zostanie jedna liczba. Czy liczba, która zostaje jest parzysta czy nieparzysta? Odpowiedź uzasadnij.

   Rozwiązanie: Wśród liczb od 1 do 2023 mamy 1011 liczb parzystych i 1012 nieparzystych. Przy wycieraniu dwóch liczb i zastąpieniu ich różnicą możliwe są następujące scenariusze
   a. Wylosowano 2 liczby parzyste – ich różnica jest liczbą parzystą, ilość liczb nieparzystych pozostaje bez zmian
   b. Wylosowano 2 liczby nieparzyste – ich różnica jest liczbą parzystą, ilość liczb nieparzystych zmniejsza się o 2
   c. Wylosowano 1 liczbę parzystą i 1 nieparzystą – ich różnica jest liczbą nieparzystą, czyli ilość liczb nieparzystych pozostaje bez zmian.
   Widzimy, że za każdym razem ilość liczb nieparzystych albo się nie zmienia, albo pomniejsza o 2. Ponieważ ilość liczb nieparzystych na początku była parzysta, to najmniejsza ich ilość jaka może zostać jest parzysta. Ostatecznie, jeśli zostaje już tylko jedna liczba, to musi być parzysta.

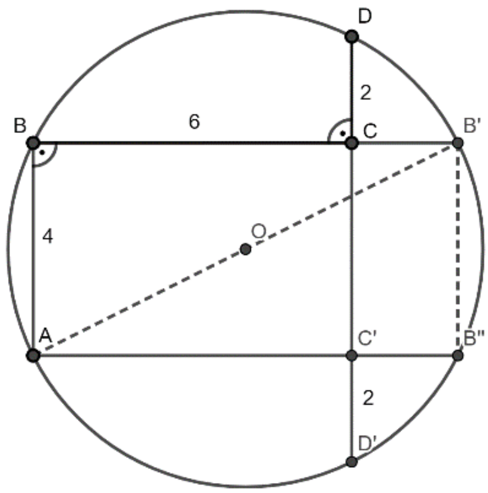
3. Wykazać, że nie istnieją liczby całkowite x, y spełniające równanie $x^3 - x = 3y^2 + 1$.

   Rozwiązanie: Przypuśćmy, że liczby całkowite x, y są rozwiązaniami tego równania. Wtedy
   $$x^3 - x = (x-1)x(x+1)$$
   jako iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest liczbą podzielną przez 3. Natomiast liczba $3y^2 + 1$ nie jest podzielna przez 3.

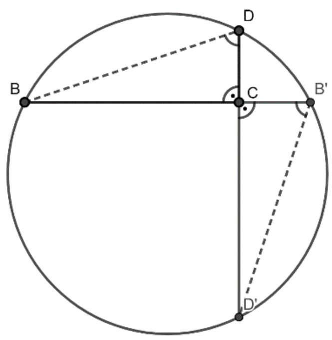
4. Znaleźć promień okręgu



Rozwiązanie:
Przedłużamy *BC* do przecięcia z okręgiem i oznaczmy środek



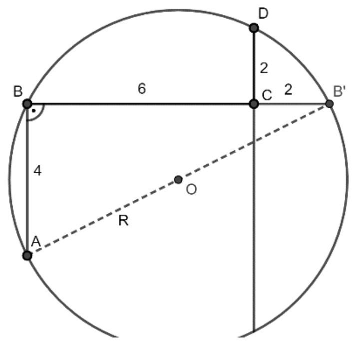
Kąt ABB’ jest prosty, czyli AB’ jest średnicą, a środek O jest na AB’. Otrzymujemy prostokąt ABB’B’’ położony symetrycznie w okręgu, czyli odcinki CD, C’D’ mają jednakową długość 2. Stąd wynika, że odcinki CC’, CD’ są długości odpowiednio 4 i 6. Otrzymujemy dwie prostopadłe cięciwy w okręgu.



Kąty BDD’ i BB’D’ są oparte na tym samym łuku, czyli $\Delta BDC \sim \Delta B'D'C$, a ponieważ są to trójkąty prostokątne, to

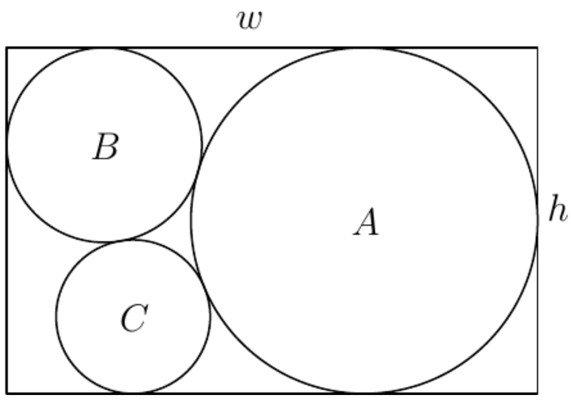
$$\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|CD'|}{|B'C|}$$

Stąd $|CD| = |CB'| = 2$, bo $|BC| = |CD'| = 6$.

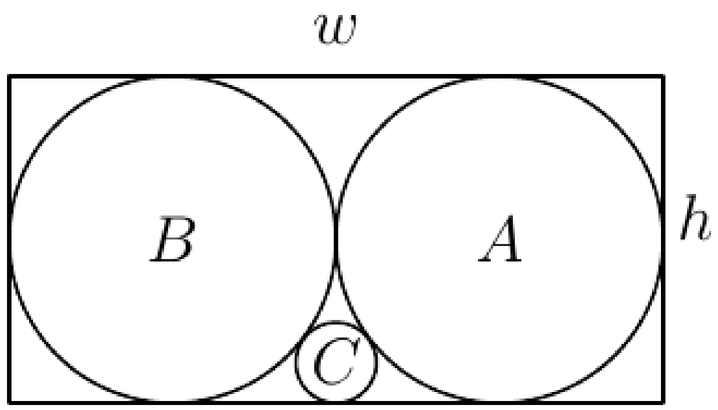


Mamy trójkąt prostokątny ABB’ o bokach $|AB| = 4, |BB'| = 6 + 2 = 8$.
Średnica AB jest przeciwprostokątną, czyli $|AB'|^2 = 4^2 + 8^2$ = 80.
Ostatecznie, $|AB'| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.
Odp. Promień okręgu ma długość $2\sqrt{5}$.

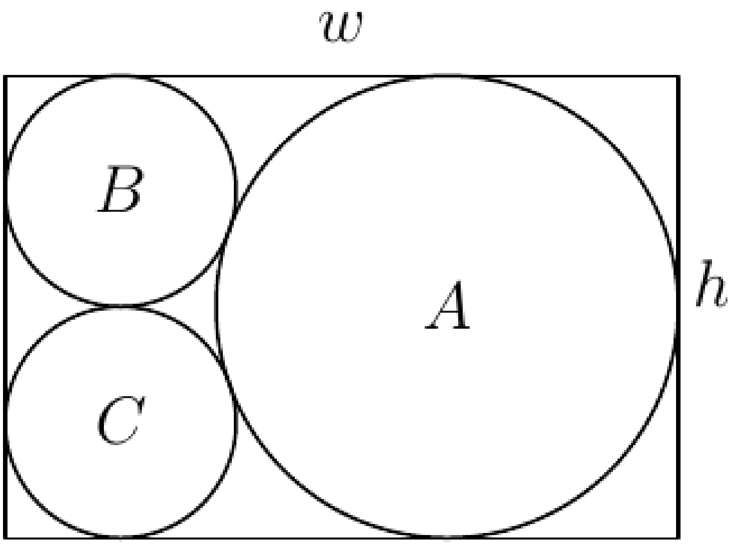
5. Do prostokąta o ustalonej szerokości w zostały wpisane trzy wzajemnie styczne okręgi jak na rysunku: okrąg A jest styczny do górnej, prawej i dolnej krawędzi, okrąg B— do górnej i lewej, okrąg C — do dolnej. Wszystkie trzy okręgi znajdują się wewnątrz prostokąta. W jakim przedziale może być wysokość h takiego prostokąta?



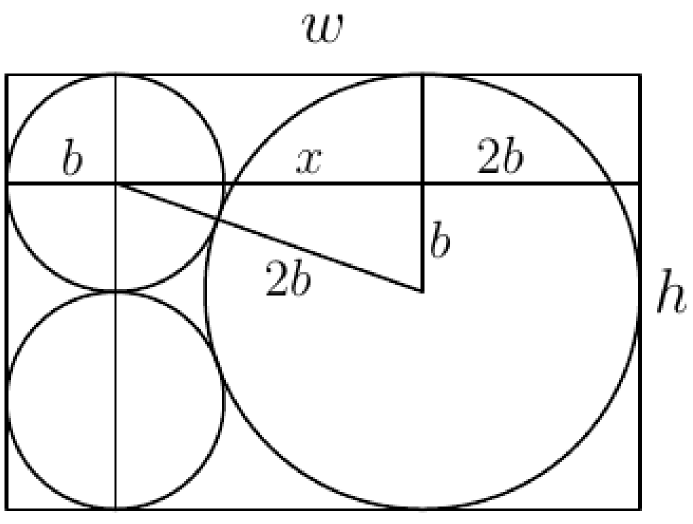
Rozwiązanie:
Prostokąt o najmniejszej wysokości pokazany jest na rysunku poniżej. Jeżeli zmniejszyć wysokość, to B przestaje być stycznym jednocześnie do A oraz do lewej krawędzi. W tym przypadku $h = \frac{w}{2}$.



Prostokąt o maksymalnej wysokości pokazany jest na kolejnym rysunku. Jeżeli zwiększyć wysokość, to C przestaje mieścić się wewnątrz prostokąta.



Niech promień okręgu B wynosi b, wówczas promień A będzie 2b.



Odcinki b i x spełniają równania

$$4b = h, 3b + x = w, x^2 + b^2 = (3b)^2.$$

Z ostatniego równania$x = 2\sqrt{2}b$. Z drugiego wynika, że $b = \frac{w}{3+2\sqrt{2}} = (3 - 2\sqrt{2})w$. Z pierwszego równania otrzymujemy odpowiedź $h = 4(3 - 2\sqrt{2})w$.

Ostatecznie $h \in \left[\frac{w}{2}, 4(3 - 2\sqrt{2})w\right]$.