SZKOŁA PONADPODSTAWOWA

Zadanie 1. Pokazać, że wśród dowolnych 5 punktów płaszczyzny o współrzędnych całkowitych znajdziemy 2 punkty, takie że środek łączącego je odcinka będzie miał współrzędne całkowite.

Rozwiązanie: Środek odcinka o współrzędnych całkowitych (x_1, y_1), (x_2, y_2) ma współrzędne

$$(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}).$$

$\frac{x_1+x_2}{2}$ jest parzyste jeżeli oba x_1, x_2 są parzyste lub oba są nieparzyste, podobnie dla y_1, y_2. Mamy 4 możliwości ze względu na parzystość współrzędnych punktu, (parzysta, nieparzysta), (nieparzysta, parzysta), (parzysta, parzysta), (nieparzysta, nieparzysta). Jeżeli mamy 4 punkty (po 1 z każdej możliwości) to żaden ze środków odcinków je łączących nie będzie miał obu współrzędnych całkowitych. Dodatkowy 5 punkt będzie musiał mieć współrzędne z tej samej klasy co któryś z wcześniejszych punktów, i środek odcinka łączącego te punkty będzie miał współrzędne całkowite.

SZKOŁA PONADPODSTAWOWA

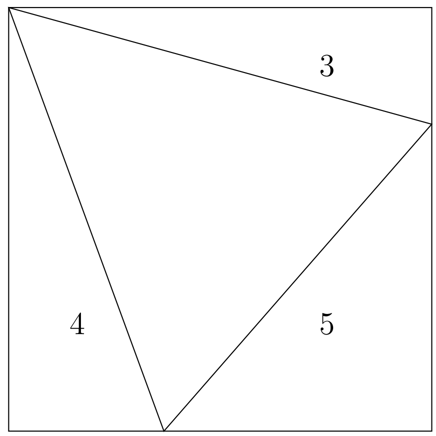
Zadanie 2. Człowiek startuje z pewnego punktu, robiąc 1 krok w dowolnym kierunku. Zatrzymuje się wybiera nowy kierunek i robi 2 kroki, powtarza procedurę dla $4, 8, 16, ..., 2^n$ kroków. Czy możliwe jest, że powróci do punktu startowego? Jeżeli tak, to po ilu krokach?

Rozwiązanie: Nie jest to możliwe co wynika z nierówności

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1 < 2^{n+1}.$$

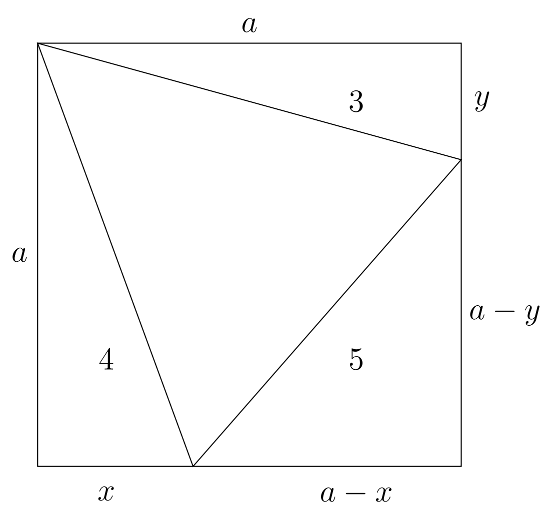
SZKOŁA PONADPODSTAWOWA

Zadanie 3. W kwadrat został wpisany trójkąt tak, że pola powierzchni odciętych trójkątów wyniosły 3, 4 oraz 5 (rysunek 1). Wyznacz pole kwadratu.



Rysunek 1: Trójkąt wpisany w kwadrat

Rozwiązanie: Pole kwadratu wynosi $12 + 4\sqrt{6}$.
Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku 2.



Rysunek 2: Oznaczenia

Wówczas

$$\begin{cases} ay = 6, \\ ax = 8, \\ (a-y)(a-x) = 10. \end{cases}$$

Pomnóżmy pierwsze dwa równania: $xy = 48/a^2$. Więc trzecie równanie sprowadza się do następującego:

$$a^2 + \frac{48}{a^2} - 24 = 0.$$

Skąd mamy dwa pierwiastki: $a_1^2 = 12 - 4\sqrt{6}$, $a_2^2 = 12 + 4\sqrt{6}$. Pierwszy pierwiastek trzeba odrzucić, ponieważ z sensu zadania wynika, że $(a - x)$ powinno być liczbą dodatnią.

SZKOŁA PONADPODSTAWOWA

Zadanie 4. W ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego ściany boczne są trójkątami prostokątnymi (kąty proste są przy wierzchołku ostrosłupa) wpisano sześcian, w ten sposób że 3 jego ściany leżą na ścianach ostrosłupa. Jeden z jego wierzchołków jest wierzchołkiem ostrosłupa a przeciwległy do niego wierzchołek jest środkiem podstawy ostrosłupa. Wyznaczyć długości krawędzi tego ostrosłupa przy założeniu że krawędzie sześcianu mają długość 1.

Rozwiązanie: Oznaczając przez x długość krawędzi bocznej ostrosłupa, krawędź podstawy będzie miała długość $x\sqrt{2}$ a wysokość podstawy $\frac{x\sqrt{6}}{2}$ wysokość ostroslupa jest przekątną sześcianu o boku 1. Wynosi więc $\sqrt{3}$. Policzymy objętość ostrosłupa ze wzoru $\frac{1}{3}P_p h$

$$\frac{1}{3}\frac{2x^2\sqrt{3}}{4}\sqrt{3} = \frac{x^2}{2}.$$

Licząc z tego samego wzoru ale biorąc jako podstawę jedną ze ścian bocznych otrzymamy $\frac{x^3}{6}$. Zatem krawędzie mają długości 3 i $3\sqrt{2}$.

Alternatywnie można obliczyć długość krawędzi z trójkąta prostokątnego złożonego z wysokości ostrosłupa, krawędzi bocznej ostrosłupa oraz części wysokości podstawy.

SZKOŁA PONADPODSTAWOWA

Zadanie 5.
Udowodnić nierówność przy założeniu, że $a, b > 0$

$$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geqslant 4$$

Rozwiązanie: Nierówności są równoważne

$$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geqslant 4$$
$$2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqslant 4$$
$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqslant 2$$
$$a^2+b^2 \geqslant 2ab$$
$$a^2-2ab+b^2 \geqslant 0$$
$$(a-b)^2 \geqslant 0$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa bo kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny, prawdziwa jest więc i pierwsza nierówność.