SZKOŁA PODSTAWOWA KLASY 4-6

Zadanie 1. Sprawdź, czy prawdziwa jest równość

$$2000 + 2001 + 2002 + \ldots + 2019 + 2020 = 2101 + 2102 + \ldots + 2119 + 2120.$$

Rozwiązanie.

Przekształcamy sumy po obu stronach równości. Sposób I.

$$L = 2000 + 2001 + 2002 + \ldots + 2019 + 2020$$

$$P = 2101 + 2102 + \ldots + 2119 + 2120 =$$
$$(2001 + 100) + (2002 + 100) + \ldots + (2019 + 100) + (2020 + 100) =$$
$$2001 + 2002 + \ldots + 2019 + 2020 + 20 \ldots 100 =$$
$$2001 + 2002 + \ldots + 2019 + 2020 + 2000 =$$
$$2000 + 2001 + 2002 + \ldots + 2019 + 2020$$

$L = P$, więc równość jest prawdziwa.

Sposób II.

$$L = 2000 + 2001 + 2002 + \ldots + 2019 + 2020 =$$
$$2000 + (2000 + 1) + (2000 + 2) + \ldots + (2000 + 19) + (2000 + 20) =$$
$$21 \ldots 2000 + 1 + 2 + \ldots + 19 + 20 = 42000 + (1 + 2 + \ldots + 19 + 20) =$$
$$P = 2101 + 2102 + \ldots + 2119 + 2120 =$$
$$(2100 + 1) + (2100 + 2) + \ldots + (2100 + 19) + (2100 + 20) =$$
$$20 \ldots 2100 + 1 + 2 + \ldots + 19 + 20 = 42000 + (1 + 2 + \ldots + 19 + 20)$$

L = P, więc równość jest prawdziwa.

SZKOŁA PODSTAWOWA KLASY 4-6

Zadanie 2. Wszystkie zwierzęta znajdujące się na farmie mają razem 33 głowy i 96 nóg. Na farmie znajdują się głównie krowy i kury, ale dodatkowo są 3 bociany i kilka kotów. Kotów jest 3 razy mniej niż kur. Ile jest krów, ile jest kotów i ile jest kur?

Rozwiązanie:
x-liczba krów
y-liczba kotów
$3y$-liczba kur
3-liczba bocianów
Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} x + y + 3y + 3 & = & 33 \\ 4x + 4y + 6y + 6 & = & 96 \end{cases}$$

otrzymujemy $x = 5, y = 10$.

SZKOŁA PODSTAWOWA KLASY 4-6

Zadanie 3. Niech P_1 będzie prostokątem o bokach długości 1 i $a > 1$. Dorysowujemy do dłuższego boku P_1 kwadrat i otrzymujemy prostokąt P_2. Do dłuższego z boków P_2 dorysowujemy kwadrat i otrzymujemy prostokąt P_3. Podobnie do dłuższego z boków P_3 dorysowujemy kwadrat i otrzymujemy prostokąt P_4. Pokazać, że obwód P_4 podzielony przez obwód P_1 jest liczbą większą od 4 i mniejszą od 5.

Rozwiązanie: Obwód P_1 jest $2a + 2$, obwód P_4 jest $10a + 6$.
$5(2a + 2) = 10a + 10 > 10a + 6$
$4(2a + 2) = 8a + 8 < 10a + 6$ ponieważ $a > 1$.

SZKOŁA PODSTAWOWA KLASY 4-6

Zadanie 4. Ile potrzeba wyścigów, aby znaleźć 2 najszybsze konie w grupie 9 koni?

- W wyścigu mogą brać udział maksymalnie 3 konie.
- Każdy koń przebiega tor zawsze w tym samym czasie.
- Każde 2 różne konie mają inne czasy przebiegu toru.
- Nie mierzymy czasów koni, znamy tylko ich miejsca w wyścigach.

Rozwiązanie: 9 koni dzielimy na 3 wyścigi A, B, C po czym robimy wyścig dla 3 zwycięzców każdego z wyścigów znajdując w ten sposób najszybszego konia. Oznaczmy konie w wyścigach odpowiednio $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ ze względu na zajętą pozycję w wyścigu. Załóżmy że wyścig A był najszybszy potem wyścig B potem C (kolejność możemy stwierdzić po wyniku wyścigu 4-tego). Najszybszym koniem jest koń a_1 drugim najszybszym może być koń a_2 lub b_1, aby to stwierdzić urządzamy dla nich 5-ty wyścig. Potrzeba więc 5 wyścigów.

SZKOŁA PODSTAWOWA KLASY 4-6

Zadanie 5. W wiosce A jest 60, a w wiosce B jest 40 dzieci w wieku szkolnym. Wioski są oddalone od siebie o 1 km. Gdzie należy zbudować szkołę (tylko dla dzieci z tych dwóch wiosek), tak aby suma odległości przebywanych przez wszystkie dzieci w drodze do szkoły była najmniejsza (odległości przebywane wewnątrz każdej ze wsi pomijamy)? Gdzie należy zbudować szkołę w przypadku gdy w każdej wiosce jest dokładnie 50 dzieci?

Rozwiązanie: $x-$ odległość wioski A od szkoły, $1-x$ odległość wioski B od szkoły. Wtedy dzieci z wioski A przebywają razem $60x$ kilometrów a dzieci z wioski B $40(1-x)$ kilometrów, wspólnie wszystkie dzieci muszą więc przechodzić $60x+40(1-x)=20x+40$, wartość ta jest najmniejsza przy $x=0$, szkołę trzeba wybudować w wiosce A.

W przypadku gdy każda wioska zawiera 50 dzieci mamy $50x+50(1-x)=50$. Dzieci będą pokonywały sumaryczne taką samą odległość bez względu na to gdzie postawimy szkołę.