

Ćwiczenia 3-4

1. Różne style matematyczne w trybie matematycznym:

Tryb kaligraficzny (tylko duże litery)

ABC

Pogrubione litery bez wypełnienia (tylko duże litery)

$\mathbb{A}BC$

Styl gotycki

$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}abc$

Styl bezszeryfowy

$ABCabc$

Pogrubione litery z wypełnieniem

\mathbf{ABCabc}

2. Utrwalenie

$a \in \mathbb{R}, \mathcal{W} \subset T, \mathbb{N}$

3. Odstępy w trybie matematycznym:

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

4. Automatyczne nawiasy `\left \right`

$$2 + \left(\frac{3}{4-x} \right)^2$$

$$\left[2 - 3 \cdot (2-x)^3 \right]^{y-2}$$

$$\left\{ \frac{2}{3} - \cos^2 x + \left[4 - \left(\frac{2-3x}{3-9x} \right)^3 \right]^2 \right\}^7$$

5. Akcenty

$\hat{a} \check{b} \acute{c} \grave{e} \vec{f}$

6. Długie zaznaczenia:

$$\overline{abc} \quad \underline{efg} \quad \widetilde{AFR}$$

7. Łamanie równań <https://www.overleaf.com/learn/latex/Aligning%20equations%20with%20amsmath>

$$\begin{aligned} y &= (x - 2)^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 \end{aligned}$$

8. Rozpisywanie na przypadki https://pt.overleaf.com/learn/latex/Questions/How_to_handle_mathematical_expressions_involving_case_statements

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{jeśli } x \geq 2 \\ -(x - 2), & \text{jeśli } x < 2 \end{cases}$$

9. Strzałki:

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \Leftarrow r$$

10. Środowisko `array`

$$\begin{array}{|l|l|l|} \hline left1 & center1 & right1 \\ \hline d & e & f \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} z &= a \\ &= a \\ f(x, y, z) &= x + y + z \end{aligned}$$

$$\chi(x) = \begin{vmatrix} x - a & -b & -c \\ -d & x - e & -f \\ -g & -h & x - i \end{vmatrix}$$

$$[A \mid Ab \mid \cdots \mid A^{n-1}b]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right]$$

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

11. Poćwicz różne środowiska dedykowane dla macierzy <https://www.overleaf.com/learn/latex/Matrices>

12. Całki i granice

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{a^n}\right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\int_a^b \sin(x) dx$$

$$\iint_D (x^2 + y - 4) dx dy$$

Wskazówka: przed indeksami do całki wstaw `\displaylimits`.

13. W jednym pliku postaraj się odwzorować wzory:

Wyrażenie #1

4. Korzystając z definicji granic właściwej i niewłaściwych ciągu uzasadnić podane równości:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{n} = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - 1) = \infty$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2 + 1) = -\infty$.

Wyrażenie #2

e) $\begin{cases} |z| = |z - 4i| \\ \frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}z < \frac{\pi}{2} \end{cases}$; f) $\begin{cases} |z + 4| = |z + 2 - 2i| \\ |z| \leq 2 \end{cases}$; g) $\begin{cases} |z - 1 - i| < \sqrt{2} \\ \text{Arg}(z - 1 - i) < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Wyrażenie #3

a) $\begin{cases} x + 5y = 2 \\ -3x + 6y = 15 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -1 \\ 3x - 2y - 2z = 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} y - 3z + 4v = 0 \\ x - 2z = 0 \\ 3x + 2y - 5v = 2 \\ 4x - 5z = 0 \end{cases}$

Wyrażenie #4

h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ 6 & -14 \\ -21 & 30 \end{bmatrix}$; j) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Wyrażenie #5

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z + t = 1 \\ 2x + 4y - z + 2t = 2 \\ 3x + 6y + 10z + 3t = 3 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x - y + z - 2s + t = 0 \\ 3x + 4y - z + s + 3t = 1 \\ x - 8y + 5z - 9s + t = -1 \end{cases}$

Wyrażenie #6

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Wyrażenie #7

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right]$$

Wyrażenie #8

$$\text{a) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^2}; \quad \text{b) } \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+4}; \quad \text{c) } \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx; \quad \text{d) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+5}}; \quad \text{e) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}}; \quad \text{f) } \int_2^3 \frac{dx}{x^2-3x}.$$

Wyrażenie #9

$$\text{a) } \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt[3]{5}, \quad \text{b) } \log_{\sqrt[3]{3}} 27, \quad \text{c) } \log_2 8\sqrt{2}, \quad \text{d) } \log_{\frac{1}{3}} 81\sqrt{3}, \quad \text{e) } 3^{2+\log_3 4}, \quad \text{f) } 2^{5-\frac{1}{3}\log_2 27}, \quad \text{g) } \sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log 16}}$$

Wyrażenie #10

$$\text{a) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}; \quad \text{b) } \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{25+x^2}}; \quad \text{c) } \int \sqrt{x^2-36} dx; \quad \text{d) } \int \sqrt{3+x^2} dx.$$

Wyrażenie #11

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+6\sqrt{n}+1} - \sqrt{n} \right); \quad \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}};$$

Wyrażenie #12

$$\text{d) } d_n = \cos \frac{\pi}{2n}; \quad \text{e*) } e_n = \sqrt[n]{5^n + 6^n}; \quad \text{f*) } f_n = \frac{n!(2n)!}{(3n)!}.$$

Wyrażenie #13

7. Korzystając z definicji liczby e oraz z twierdzenia o granicy podciągu obliczyć podane granice:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{6}{n})^n$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n+1})^{n+1}$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n+3}{n})^{n+2}$, d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{n})^{-n}$,

Wyrażenie #14

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n - 1)$; e*) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi}{3^n} \cos \frac{4\pi}{3^n}$; f) $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1})$.