

## Ćwiczenia 12

1. Utrwalenie. W jednym pliku postaraj się odzworować wzory:

Wyrażenie #1

4. Korzystając z definicji granic właściwej i niewłaściwych ciągu uzasadnić podane równości:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1, \text{ b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0, \text{ c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{n} = 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1) = \infty, \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2+1) = -\infty.$$

Wyrażenie #2

$$\text{e) } \left\{ \begin{array}{l} |z| = |z - 4i| \\ \frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}z < \frac{\pi}{2} \end{array} \right. ; \quad \text{f) } \left\{ \begin{array}{l} |z+4| = |z+2-2i| \\ |z| \leq 2 \end{array} \right. ; \quad \text{g) } \left\{ \begin{array}{l} |z-1-i| < \sqrt{2} \\ \text{Arg}(z-1-i) < \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

Wyrażenie #3

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x + 5y = 2 \\ -3x + 6y = 15 \end{array} \right. ; \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -1 \\ 3x - 2y - 2z = 1 \end{array} \right. ; \quad \text{c) } \left\{ \begin{array}{l} y - 3z + 4v = 0 \\ x - 2z = 0 \\ 3x + 2y - 5v = 2 \\ 4x - 5z = 0 \end{array} \right.$$

Wyrażenie #4

$$\text{h) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{i) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ 6 & -14 \\ -21 & 30 \end{bmatrix}; \quad \text{j) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wyrażenie #5

$$\text{c) } \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z + t = 1 \\ 2x + 4y - z + 2t = 2 \\ 3x + 6y + 10z + 3t = 3 \\ x + y + z + t = 0 \end{array} \right. ; \quad \text{d) } \left\{ \begin{array}{l} x - y + z - 2s + t = 0 \\ 3x + 4y - z + s + 3t = 1 \\ x - 8y + 5z - 9s + t = -1 \end{array} \right.$$

Wyrażenie #6

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Wyrażenie #7

$$B = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right]$$

Wyrażenie #8

$$\text{a) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^2}; \quad \text{b) } \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+4}; \quad \text{c) } \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx; \quad \text{d) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+5}}; \quad \text{e) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}}; \quad \text{f) } \int_2^3 \frac{dx}{x^2-3x}$$

Wyrażenie #9

$$\text{a) } \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt[3]{5}, \quad \text{b) } \log_{\sqrt[3]{3}} 27, \quad \text{c) } \log_2 8\sqrt{2}, \quad \text{d) } \log_{\frac{1}{3}} 81\sqrt{3}, \quad \text{e) } 3^{2+\log_3 4}, \quad \text{f) } 2^{5-\frac{1}{3}\log_2 27}, \quad \text{g) } \sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log 16}}$$

Wyrażenie #10

$$\text{a) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}; \quad \text{b) } \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{25+x^2}}; \quad \text{c) } \int \sqrt{x^2-36} dx; \quad \text{d) } \int \sqrt{3+x^2} dx.$$

Wyrażenie #11

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n+6\sqrt{n}+1} - \sqrt{n} \right); \quad \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}$$

Wyrażenie #12

$$\text{d) } d_n = \cos \frac{\pi}{2n}; \quad \text{e*) } e_n = \sqrt[n]{5n+6n}; \quad \text{f*) } f_n = \frac{n!(2n)!}{(3n)!}$$

Wyrażenie #13

7. Korzystając z definicji liczby  $e$  oraz z twierdzenia o granicy podciągu obliczyć podane granice:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{n}\right)^n, \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}, \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^{n+2}, \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-n}$$

Wyrażenie #14

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n-1); \quad \text{e*) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi}{3^n} \cos \frac{4\pi}{3^n}; \quad \text{f) } \sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}).$$