Repetytorium matematyki elementarnej
- ćwiczenia 2
dr Piotr Jastrzębski

1 Tematyka

- Podstawowe własności i operacje na funkcjach:
  - injekcja, surjekcja, bijekcja;
  - monotoniczność;
  - ograniczoność;
  - okresowość;
  - parzystość, nieparzystość;
  - przekształcenia wykresów funkcji

2 Badanie funkcji

2.1 Injekcja, surjekcja, bijekcja

Injekcja (inaczej funkcja różnowartościowa) - funkcja, której każdy element przeciwdziedziny przyjmowany jest co najwyżej raz.

Funkcja $f\colon X \to Y$ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych dwóch elementów $a, b \in X$ spełniony jest warunek

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b).$$

W praktyce sprawdzamy warunek: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

Przykłady:

- funkcja tożsamościowa $f(x) = x$
- funkcja liniowa $f(x) = ax + b, a \neq 0$
- $f(x) = \frac{1}{x}$

Surjekcja (inaczej funkcja "na") - funkcja przyjmująca jako swoje wartości wszystkie elementy przeciwdziedziny, tj. której zbiór wartości jest równy przeciwdziedzinie.

Funkcja $f\colon X \to Y$ odwzorowuje zbiór X na zbiór Y wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru Y jest wartością funkcji w pewnym punkcie.

Przykłady:

- funkcja tożsamościowa $f(x) = x$
- funkcja kwadratowa $f(x) = x^2,\ f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$

Bijekcja - funkcja, która jest różnowartościowa i jest "na".

Wniosek Funkcja jest bijekcją wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja do niej odwrotna – również i ona jest bijekcją.

Przykłady:

- funkcja tożsamościowa $f(x) = x$
- funkcja sześcienna $f(x) = x^3$

2.2 Monotoniczność funkcji

Funkcja rosnąca (ściśle rosnąca) Funkcję f nazywamy rosnącą w zbiorze (przedziale) X, jeśli dla każdej pary argumentów $x_1, x_2 \in X$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) < f(x_2)$.

$$\underset{x_1,x_2\in X\subset D_f}{\forall} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Funkcja malejąca (ściśle malejąca) Funkcję f nazywamy malejącą w zbiorze (przedziale) X, jeśli dla każdej pary argumentów $x_1, x_2 \in X$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) > f(x_2)$.

$$\underset{x_1,x_2\in X\subset D_f}{\forall} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Funkcja niemalejąca (słabo rosnąca) Funkcję f nazywamy niemalejącą w zbiorze (przedziale) X, jeśli dla każdej pary argumentów $x_1, x_2 \in X$ z nierówności $x_1 \leqslant x_2$ wynika nierówność $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

$$\underset{x_1,x_2\in X\subset D_f}{\forall} x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

Funkcja nierosnąca (słabo malejąca) Funkcję f nazywamy nierosnącą w zbiorze (przedziale) X, jeśli dla każdej pary argumentów $x_1, x_2 \in X$ z nierówności $x_1 \leqslant x_2$ wynika nierówność $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

$$\underset{x_1,x_2\in X\subset D_f}{\forall} x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

Funkcja niemalejąca (słabo rosnąca) Funkcję f nazywamy niemalejącą w zbiorze (przedziale) X, jeśli dla każdej pary argumentów $x_1, x_2 \in X$ z nierówności $x_1 \leqslant x_2$ wynika nierówność $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

$$\underset{x_1,x_2\in X\subset D_f}{\forall} x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

Funkcja nierosnąca (słabo malejąca) Funkcję f nazywamy nierosnącą w zbiorze (przedziale) X, jeśli dla każdej pary argumentów $x_1, x_2 \in X$ z nierówności $x_1 \leqslant x_2$ wynika nierówność $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

$$\forall_{x_1, x_2 \in X \subset D_f} \, x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

Funkcja monotoniczna Funkcję, która jest nierosnąca lub niemalejąca nazywa się monotoniczną.

Funkcja stała Funkcja $f \colon X \to Y$ jest funkcją stałą, jeśli istnieje $c \in Y$ takie, że dla każdego $x \in X$ zachodzi $f(x) = c$.

$$\exists_{c \in Y} \forall_{x \in X} \, f(x) = c$$

2.3 Ograniczoność

Funkcja ograniczona Funkcję f, której zbiór wartości jest ograniczony, nazywa się funkcją ograniczoną.

$$\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{x \in D_f} \, |f(x)| \leqslant M$$

2.4 Okresowość

Funkcja okresowa Mówimy, że funkcja $y = f(x)$ jest funkcją okresową o okresie t, jeśli istnieje taka liczba $t \neq 0$, która dodana do dowolnej dopuszczalnej wartości argumentu nie zmienia wartości funkcji, tzn. $f(x + t) = f(x)$. Najmniejszą liczbę dodatnią o tej własności (jeżeli istnieje) nazywamy okresem podstawowym (zasadniczym) funkcji.

Przykłady:

- $y = \sin x$, okres podstawowy $t = 2\pi$
- funkcja Dirichleta jest okresowa, ale nie ma okresu podstawowego

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \text{ wymierne} \\ 0, & \text{gdy } x \text{ niewymierne} \end{cases}$$

2.5 Parzystość, nieparzystość

Funkcje parzyste i nieparzyste – funkcje cechujące się pewną symetrią przy zmianie znaku argumentu. Prowadzi to również do symetrii ich wykresów.

Funkcja f jest:

- parzysta, jeżeli spełnia równanie $f(x) = f(-x)$ (symetria względem zmiany znaku argumentu);
- nieparzysta, jeżeli spełnia równanie $f(-x) = -f(x)$ (symetria względem jednoczesnej zmiany znaku argumentu i wartości funkcji).

Równania te muszą być prawdziwe dla wszystkich x należących do dziedziny funkcji f. Powyższe równości wymagają, aby wraz z x do dziedziny należał również punkt $-x$, stąd dziedziny funkcji parzystych i nieparzystych muszą być symetryczne względem zera.

3 Operacje na funkcjach

3.1 Złożenie funkcji

Niech $f : X \to Y$ oraz $g : Y \to Z$ będą dowolnymi funkcjami. Ich złożeniem nazywamy funkcję $h : X \to Z$ taką, że:

$h(x) = g\left(f(x)\right)$ dla $x \in X$. Funkcje f oraz g nazywa się funkcjami składanymi, zaś h nosi nazwę funkcji złożonej.

Składanie dwóch funkcji można traktować jako operator dwuargumentowy, oznaczany $\circ$. Dla powyższych funkcji $h = g \circ f$, zatem dla dowolnego x z dziedziny funkcji f mamy równość: $h(x) = g\left(f(x)\right) = (g \circ f)(x)$.

3.2 Odwrotność funkcji

Funkcję $f\colon X \to Y$ nazywamy odwracalną w Y, gdy istnieje funkcja $g\colon Y \to X$ taka, że: $g(f(x)) = x$ dla każdego $x \in X$ $f(g(y)) = y$ dla każdego $y \in Y$.

Innymi słowy g jest taką funkcją, że złożenia $g \circ f$ oraz $f \circ g$ są identycznościami, odpowiednio, na zbiorze X i Y. Funkcję g nazywamy funkcją odwrotną do f i oznaczamy symbolem f^{-1}.

Bezpośrednio z definicji wynika, że f jest funkcją odwracalną w Y wtedy i tylko wtedy, gdy jest funkcją wzajemnie jednoznaczną (bijekcją).

3.3 Przekształcenia wykresu funkcji

Nazwa	Wzór funkcji po przekształceniu
Translacja o wektor $\vec{u} = [a, b]$	$y = f(x - a) + b$
Symetria osiowa względem OX	$y = -f(x)$
Symetria osiowa względem OY	$y = f(-x)$
Powinowactwo prostokątne o osi OX i skali a	$y = a \cdot f(x)$
Powinowactwo prostokątne o osi OY i skali a	$y = f\left(\frac{1}{a} \cdot x\right)$

Źródło definicji: Wikipedia; A.Cewe, H. Nahorska, I. Pancer, Tablice Matematyczne, Wyd. Podkowa, Gdańsk 1999.