

Lista zadań dla studentów MiBM. 6

- Napisać równanie stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:
 - $f(x) = x^2$, $(-1, f(-1))$; b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $(1, f(1))$;
 - $f(x) = \ln(x^2 + e)$, $(0, f(0))$; d) $f(x) = \arcsin x$, $(0, f(0))$.
- Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:
 - $\sqrt[3]{7,9999}$, b) $e^{0,04}$, c) $\ln \frac{2000}{2001}$, d) $\arccos 0,499$, e) $\frac{1}{\sqrt{3,98}}$.
- Wyznaczyć cztery pierwsze pochodne podanych funkcji:
 - $f(x) = \sin 4x$, b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, c) $f(x) = \sin^2 x$, d) $f(x) = \ln(1 + 2x)$.
- Zastosować twierdzenie Lagrange'a do podanych funkcji na wskazanych przedziałach. Wyznaczyć odpowiednie punkty:
 - $f(x) = \arcsin x$, $[-1, 1]$; b) $g(x) = \ln x$, $[1, e]$.
- Znaleźć przedziały monotoniczności podanych funkcji:
 - $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2$, b) $g(x) = x \ln x$, c) $h(x) = (x - 3)\sqrt{x}$,
d) $p(x) = x + \sin x$, e) $q(x) = \frac{x^3}{x-2}$, f) $r(x) = e^x \cos x$.
- Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć podane granice:
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$, c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2^x - 2^{2-x}}{(x-1)^2}$, d) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2})$, e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$, f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$,
g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \frac{1}{x})^x$, h) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$, i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, j) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.
- Napisać wzór Taylora z resztą Lagrange'a dla podanej funkcji, wskazanego punktu oraz n :
 - $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $x_0 = 2$, $n = 3$; b) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $n = 3$.
- Stosując cztery pierwsze wyrazy wzoru Maclaurina obliczyć:
 - $\sin 0.1$, b) $\ln 1.1$, c) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, e) $\sqrt[3]{0.997}$.Oszacować resztę.
- Znaleźć wartości najmniejsze i największe funkcji na wskazanych przedziałach:
 - $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $[-2, 5]$; b) $g(x) = x^2 \ln x$, $[1, e]$;
 - $h(x) = \arctg x - \frac{x}{2}$, $[0, 2]$; d) $p(x) = x^2|x^2 - 1|$, $[-2, 3]$.
- Kamień rzucony pionowo w górę z pewną prędkością początkową wznosi się w ciągu czasu t na wysokość h daną wzorem $h = -5t^2 + 50t$. Wyznaczyć prędkość początkową, czas wznoszenia i największą wysokość.
- Wskaźnik wytrzymałości W leżącej poziomo belki o przekroju prostokąta wyraża się wzorem $W = \frac{1}{6}xy^2$, gdzie x jest szerokością, a y wysokością przekroju belki. Jak wyciąć z pnia mającego kształt walca o średnicy 20 cm belkę o największej wytrzymałości.
- Siła F skierowana pod kątem α do poziomu, potrzebna do poruszenia ciała o ciężarze G wynosi
$$F = \frac{\mu G}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha},$$
gdzie μ jest współczynnikiem tarcia. Obliczyć kąt α , przy którym siła F potrzebna do poruszenia ciała jest najmniejsza.
- Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne podanych funkcji:
 - $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$, b) $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$, c) $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$, d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, e) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$,
f) $f(x) = 2\arctg x - \ln(1 + x^2)$.
- Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia podanych funkcji:
 - $f(x) = x^4 - 6x^2 - 6x$, b) $g(x) = \frac{x^2}{(x-1)^3}$, c) $h(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$,
d) $p(x) = \sin^2 x$, e) $q(x) = x^2 \ln x$, f) $r(x) = (1 + x^2)e^x$.

15. Sporządzić wykres funkcji ciągłej na podstawie następujących informacji:

a)

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	+	0	+	×	-	0	+
y''	-	0	+	×	+	+	+
y		0		1		0	

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x - 2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x + 2 = 0;$$

b)

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	-	0	-	×	-	0	+
y''	+	0	-	×	+	+	+
y		0		×		1	

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x + 1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x + 2 = 0;$$

c)

x	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	-	0	-	-2	-	0	+
y''	+	0	-	0	+	+	+
y		1		0		-1	

$$f(2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x + 6 = 0.$$

16. Zbadać przebieg zmienności podanych funkcji i następnie sporządzić ich wykresy:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, b) $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, c) $h(x) = e^{-x^2}$, d) $p(x) = \frac{x}{1-x^2}$.