

Lista zadań dla studentów MiBM. 5

1. Znaleźć funkcje odwrotne do podanych i sporządzić ich przybliżone wykresy:

a) $f(x) = 1 - 2^{-x}$, b) $f(x) = 3 - \sqrt{x+2}$, c) $g(x) = \ln^3(x+1)$.

2. Korzystając definicji granicy funkcji uzasadnić podane równości:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (3 + 2x^3) = 5$, b) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \sqrt{x^2 - 9} = 0$, c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^3}{x^3 + 1} = -2$, d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

3. Zbadać, obliczając granice jednostronne, czy istnieją podane granice funkcji:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x}}$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \operatorname{sgn} x)$, d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x^3 - x^2}$.

4. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji obliczyć podane granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$, b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 1}}{x}$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{25^x - 9^x}{5^x - 3^x}$, d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$, e) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6}$, f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$, g) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x})$.

5. Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych obliczyć podane granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$, c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 2^x)}{3^x}$, d) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}(2x))^{\operatorname{ctg} x}$, e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 2x}$,
f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{3}}$, g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$, h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x})}{x}$, i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x+2})^{2x-1}$.

6. Znaleźć asymptoty podanych funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, b) $f(x) = e^{-x} \sin x + x$, c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$, d) $f(x) = 2^{-\frac{1}{x^2}}$,
e) $f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 4}$, f) $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$, g) $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$.

7. Wyznaczyć punkty nieciągłości podanych funkcji i określić rodzaje nieciągłości w tych punktach:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2}{|x-1|} & \text{dla } x \neq 1 \\ 1 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$; b) $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$; c) $h(x) = \begin{cases} \frac{|x|+x}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$.

8. Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = x|x|$, $x_0 = 0$; b) $f(x) = |x-1|$, $x_0 = 1$; c) $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

9. Korzystając z reguł różniczkowania obliczyć pochodne podanych funkcji:

a) $y = x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^4}$, b) $y = \frac{x - x^2 + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}$, c) $y = x^3 \cdot \sin x$, d) $y = (x^2 - 2x) \cdot 2^x$, e) $y = \arcsin x \cdot \ln x$,
f) $y = \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$, g) $y = \frac{x \sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$, h) $y = \arcsin \sqrt[3]{x}$, i) $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, j) $y = x^x$,
k) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{3}$, l) $y = \arcsin \sqrt[4]{1-5x}$, m) $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^x})$, n) $y = 3x^{\cos x}$, o) $y = \sin^7 \frac{2^x + 1}{3^x + 1}$,
p) $y = (\operatorname{arctg} x)(\operatorname{arctg} \frac{1}{x})$, q) $y = (x^3 + \frac{1}{x^2})e^x$, r) $y = \frac{\sin x}{x^4 + 4}$, s) $y = \frac{\arcsin x}{e^x}$, t) $y = (1 + \sqrt[4]{x})\operatorname{tg}(\sqrt{x})$.