

## Lista zadań dla studentów MiBM. 4

1. Z badać, czy podane zbiory są ograniczone i znaleźć ich kresy:

$$A = \{(-3)^n : n \in \mathbb{N}\}, B = \{3^{-n} : n \in \mathbb{N}\}, C = \{2^z : z \in \mathbb{Z}\}, D = \left\{ \frac{2n}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}, E = \{3 - |x| : x \in \mathbb{R}\}, \\ F = \left\{ \frac{1}{x} : x \in (0, 1] \right\}, G = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 3\}, H = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 4 \leq 0\}.$$

2. Napisać cztery początkowe wyrazy ciągu o wyrazie ogólnym  $a_n$ :

$$a_n = \frac{3n-2}{2^n}, b_n = \frac{n+5}{2n+1}, c_n = (-1)^n + \frac{1}{n}; d_n = \sqrt{2n^2 - n} \quad e_n = \frac{n!-1}{2n^2+3}, f_n = \frac{2^n+3^n}{4^n}.$$

3. Z badać, czy podane ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca:

$$a_n = \frac{n}{n+1}, b_n = \frac{10^n}{n!}, c_n = \cos \frac{\pi}{2n}, d_n = \frac{n!(2n)!}{(3n)!}, e_n = \frac{3n+2}{n+4}, f_n = \frac{n!}{n^n}.$$

4. Wyznaczyć granice ciągów:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3n+7}{3n^2+5n-6}$ , b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+4})^2}{2n+13}$ , c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n-1)}{(3n+6)(2n+2)}$ , d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-2n^2+5}{(0,5n+1)^3}$ , e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^2+3)^2}{n^4-9}$ ,  
f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5-3n}{1-2n} \right)^2$ , g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(3n+5)^2}{(1-2n)^2}}$ , h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 8^n + 11}{3 \cdot 8^n - 1}$ , i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n - 2}{2 - 7^{n-1}}$ , j)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^{2n-5}}{8 \cdot 4^{n+5}}$ , k)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$ ,  
l)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 7n - 1})$ .

5. Korzystając z twierdzeń o granicach niewłaściwych wyznaczyć:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{n}$ , b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}}$ , c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \frac{1}{n})$ , d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 + \frac{1}{n}) \cdot n$ , e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n})^n$ , f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{n})^n$ , g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2+\frac{1}{n}}$ .

6. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach znaleźć podane granice:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}$ , b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n}$ , c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10 + \sin n}$ ,  
d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{7}{8}\right)^n + \left(\frac{8}{7}\right)^n}$ , e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sin 2n}{(3n-1)^2}$ , f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + n \cdot 2^n}$ .

7. Korzystając z definicji liczby  $e$  oraz z twierdzenia o granicy podciągu obliczyć podane granice:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{n}\right)^n$ , b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$ , c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^{n+2}$ , d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-n}$ ,  
e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2}$ , f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-7}{n}\right)^{n-1}$ , g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^2-1}$ , h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+3}{n^3}\right)^{3n^3}$ .

8. Obliczyć

a)  $\log_{\sqrt{5}} 5 \sqrt[3]{5}$ , b)  $\log_{\sqrt[3]{3}} 27$ , c)  $\log_2 8 \sqrt{2}$ , d)  $\log_{\frac{1}{3}} 81 \sqrt{3}$ , e)  $3^{2+\log_3 4}$ ,  
f)  $2^{5-\frac{1}{3} \log_2 27}$ , g)  $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2} \log 16}}$ , h)  $\log_2 3 \cdot \log_3 6 \cdot \log_6 8$ .

9. Rozwiązać równania i nierówności:

a)  $\log_2 \sqrt{2} x = -3$ , b)  $\log_x 25 = 2$ , c)  $\log_4 \log_2 \log_3 (x^2 - 63) = \frac{1}{2}$ ,  
d)  $\log 5 + \log(x+10) - 1 = \log(21x-20) - \log(2x-1)$ ,  
e)  $\ln(x^2+1) > \ln(3x-1)$ , f)  $\log_{\frac{1}{5}}(2x+5) < \log_{\frac{1}{5}}(16-x^2) + 1$ .

10. Określić dziedziny naturalne i zbiory wartości funkcji:

a)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ , b)  $g(x) = \sqrt{-x^2}$ , c)  $h(x) = \sin \frac{1}{x}$ , d)  $p(x) = \log_3 |\cos x|$ , e)  $f(x) = \sqrt{\sin x}$ , f)  $g(x) = \frac{1}{1+\cos x}$ ,  
g)  $h(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ , h)  $p(x) = \log_3(1+|x|)$ , i)  $q(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ , j)  $r(x) = \frac{2^x}{2^x-4}$ .

11. Określić funkcje złożone  $f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ g$ , jeżeli:

a)  $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = x^2$ ; b)  $f(x) = \log_2 x, g(x) = 2^x$ ; c)  $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^4$ .