Lista zadań dla studentów MiBM. 2

1. Obliczyć:

a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \right)$;

c) $\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$;

f) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ -6 & 14 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ 6 & -14 \\ -21 & 30 \end{bmatrix}$;

h) $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -2 & -6 \end{bmatrix}$; i) $\begin{bmatrix} 7 & -2 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$; j) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 6 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ wyznaczyć $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A^T \cdot B^T$ i $B^T \cdot A^T$.

3. Obliczyć rzędy macierzy metodą eliminacji Gaussa:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \\ -5 & -5 & -20 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ -3 & 9 & 0 \\ 2 & 17 & 9 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ -1 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

4. Badając rzędy odpowiednich macierzy sprawdzić czy dane wektory są liniowo zależne:

a) $[1, 2, 3, 4], [1, 2, 1, 2], [4, 3, 2, 1], [2, 1, 2, 1]$; b) $[2, 3, 1, 2, 3], [1, 3, 2, 1, 3], [0, 1, 1, 0, 1]$.

c) $[1, 1, 2, 2], [1, -1, 1, -1], [3, 1, 5, 5]$.

5. Obliczyć podane wyznaczniki (w d), e) wyciągnąć stałe przed wyznacznik):

a) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -12 & 6 & 0 \\ 3 & -8 & 6 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 12 & 24 & 12 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -10 & 5 \end{vmatrix}$.

6. Obliczyć wyznaczniki stosując rozwinięcie Laplace'a względem wybranego wiersza lub kolumny:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 11 & 11 & 11 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 9 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

7. Doprowadzić do prostszej postaci i obliczyć:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & -5 & 2 \end{vmatrix}$.

8. Stosując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach uprościć i obliczyć:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

9. Wyznaczyć macierze odwrotne danych macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

10. Wyznaczyć macierze X i Y z równań: $X \cdot A + B = C$ i $DY = EY + F$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

11. Wykorzystując twierdzenie Kroneckera-Capellego rozwiązać podane układy metodą eliminacji Gaussa:

a) $\left\{ \begin{array}{rrrrcl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & & = & 2 \\ 4x_1 & +x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & 8 \\ 3x_1 & -3x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \end{array} \right.$; b) $\left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 5 \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 8 \\ 2x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = & 3 \end{array} \right.$; c) $\left\{ \begin{array}{rrrcl} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & -4x_2 & +5x_3 & = & 0 \end{array} \right.$;

d) $\left\{ \begin{array}{l} 3x + y + z = -1 \\ x + 2z = -6 \\ 3y + 2z = 0 \end{array} \right.$; e) $\left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 4 \\ 3y + z = 5 \end{array} \right.$; f) $\left\{ \begin{array}{l} x - y + z = -1 \\ 2x + y + 2z = 7 \\ 3x - 6y + 3z = -12 \end{array} \right.$.

12. Korzystając ze wzoru Cramera znaleźć rozwiązania podanych układów równań:

a) $\left\{ \begin{array}{l} 5x - 2y = 6 \\ 3x + y = 4 \end{array} \right.$; b) $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{array} \right.$; c) $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y - z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{array} \right.$.