Zadania MiBM 1

Liczby zespolone

1. Obliczyć:

a) $(2+i)(3-2i)-5+i$; b) $(\frac{1}{3}-2i)(\frac{1}{2}+3i)$; c) $(3+i)\overline{3+i}$; d) $(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i)^2$; e)$(2+5i)^3$;

f) $(1+i)(2+i)(3+i)$; g) $\dfrac{2+3i}{2-i}$; h) $\dfrac{4+i}{1+2i}$; i) $\dfrac{(2+4i)^2}{1-i}$; j) $\dfrac{(1-i)^3}{(1+i)^2}$.

2. Rozwiązać równania:

a) $z+3-i=iz+4$; b) $(2+i)\overline{z}-2=\overline{z}-4i$; c) $(1+i)z+3(z-i)=0$; d) $\dfrac{2+i}{z}=\dfrac{3+i}{z-i}$;

e) $z^2+4z+5=0$; f) $z^2-6z+11=0$; g) $z^4+3z^2-4=0$; h) $z^3-4z^2+6z-4=0$.

3. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej liczbę $z=2+3i$ oraz liczby $-z, \overline{z}, -\overline{z}$.

4. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiory liczb spełniających warunki:

a) $\begin{cases} |z|=4 \\ \frac{\pi}{6} \le \mathrm{Arg} z \le \frac{\pi}{3} \end{cases}$; b) $\begin{cases} |z-2| \le 2 \\ 0 \le \mathrm{Arg} z \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$; c) $\begin{cases} |z+i| \ge 1 \\ \pi \le \mathrm{Arg} z \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} |z-3-4i| < 5 \\ 0 \le \mathrm{Arg} z < \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

5. Zaznaczyć liczby na płaszczyźnie zespolonej i zapisać je w postaci trygonometrycznej:

a) $5+5i$; b) $-3+3\sqrt{3}i$; c) $-1-i$; d) $8\sqrt{3}-8i$.

6. Obliczyć:

a) $(1-i\sqrt{3})^4$; b) $(-2\sqrt{3}-2i)^5$; c) $\dfrac{(1+i)^{21}}{(1-i)^{19}}$.

7. Korzystając ze wzoru Moivre'a na potęgowanie liczby zespolonej wyrazić $\sin 3\alpha, \cos 3\alpha, \sin 4\alpha, \cos 4\alpha$ przez potęgi $\sin\alpha, \cos\alpha$.

8. Wyznaczyć pierwiastki i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej:

a) $\sqrt[3]{1}$; b) $\sqrt[3]{-1}$; c) $\sqrt[4]{-81}$; d) $\sqrt[6]{-64}$; e) $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$.

Wektory

1. Wyznaczyć następujące kombinacje liniowe wektorów:

a) $3\cdot[2,1]+2\cdot[-1,4]$; b) $2\cdot[3,4,-1,3]-3\cdot[2,3,1,-2]$; c) $2\cdot[1,2,3]+3\cdot[1,1,1]-[5,7,9]$.

2. Wykonać działania z iloczynem skalarnym:

a) $[1,2,1,2]\circ[1,-1,1,-1]$; b) $([1,-1,2]\circ[2,2,1])\cdot[1,2,3]$; c) $\dfrac{[1,2,-2]}{\sqrt{[1,2,-2]\circ[1,2,-2]}}$.

3. Wektor $\vec{v}$ zapisać jako kombinację wektorów $\vec{x}=[1,0,0]$, $\vec{y}=[1,1,0]$ i $\vec{z}=[1,1,1]$

a) $\vec{v}=[2,3,1]$; b) $\vec{v}=[1,3,-1]$; c) $\vec{v}=[3,5,4]$. Wsk. Zapisać najpierw wektory $[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]$ bazy kanonicznej jako kombinacje wektorów $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$.

4. Wykazać, że liniowa zależność wektorów $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ jest równoważna liniowej zależności wektorów $\vec{x},\vec{y}-\vec{x},\vec{z}$.

5. Sprawdzić czy dane wektory są liniowo zależne:

a) $[1,1,1],[1,1,0],[1,0,0]$; b) $[1,2,1],[2,1,2],[1,1,1]$ c) $[1,2,3],[1,2,4],[1,2,5]$; c) $[1,1,1],[1,2,3],[2,2,2]$

d) $[1,-1,1,-1],[1,1,1,1],[0,5,0,5]$; e) $[1,2,1,0],[5,7,9,0],[1,2,3,4]$.

6. Sprawdzić, które z układów wektorów są bazami przestrzeni $\mathbb{R}^3$:

a) $([1,1,0],[1,0,1],[0,1,1])$; b) $([1,2,3],[3,2,1],[5,2,5])$; c) $([4,1,2],[3,1,1],[2,3,3])$.

Wsk. W zadaniach (5) i (6) warto wykorzystać (4).