Twierdzenie 1. *Niech funkcje f, g będą całkowalne na $[a.b]$. Wówczas:*

1. $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$

2. $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$

3. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ *dla dowolnego* $c \in [a, b]$,

4. *Jeżeli* $f(x) \leq g(x)$ *dla każdego* $x \in [a, b]$, *to* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

Przykłady: 1. 1. $\displaystyle\int_0^2 |1 - x^2|dx$, 2. Wykazać, że $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx > \frac{e-1}{e}$

Podstawienie w całce oznaczonej

Twierdzenie 2. *Jeżeli:*

1. $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *ma ciągłą pochodną na* $[\alpha, \beta]$,

2. $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,

3. *funkcja* f *jest ciągła na* $[a, b]$, *to*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Przykłady: 2. 1. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}dx$

2. $\displaystyle\int_{-2}^1 x\sqrt{3 + x}dx$

Definicja 1. Wartością średnią funkcji f całkowalnej na przedziale $[a, b]$ nazywamy liczbę

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Twierdzenie 3 (Całkowe o wartości średniej)**.** *Jeżeli f jest ciągła na $[a, b]$, to istnieje $c \in [a, b]$, taka że*

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c).$$

Przykład: 1. Znaleźć punkt $c \in [1, 4]$, w którym funkcja $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ osiąga wartość średnią.

- Jeżeli f ma ciągłą pochodną na $[a,b]$, to długość łuku krzywej $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$ wyraża się wzorem:

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Przykład: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ dla $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

- Objętość bryły powstałej w wyniku obrotu dokoła Ox obszaru ograniczonego osią Ox i wykresem funkcji f całkowalnej na $[a,b]$:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Przykład: $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$.

- Pole powierzchni powstałej w wyniku obrotu dokoła Ox wykresu funkcji f (o ciągłej pochodnej) dla $x \in [a,b]$:

$$|\Sigma| = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Przykład: $f(x) = x^3$, $x \in [0, 1]$.

Całki niewłaściwe

Definicja 2. Dla f określonej na $[a, \infty]$ lub $[-\infty, b]$ całkę określamy wzorem:

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)dx$$

lub odpowiednio

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{s \to -\infty} \int_s^b f(x)dx.$$

Ponadto

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \int_{-\infty}^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx.$$

Przykłady: 3. 1. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$

2. $\displaystyle\int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{4 + x^2}$

Wn. 1. $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ *jest zbieżna gdy* $p > 1$ *i rozbieżna gdy* $p \leq 1$.

Definicja 3. Dla f ciągłej i nieograniczonej na $[a, b)$ lub $(a, b]$ całkę określamy wzorem:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

lub odpowiednio

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{s \to a^+} \int_s^b f(x)dx.$$

Wn. 2. $\int_o^b \frac{dx}{x^p}$ *jest zbieżna gdy* $p < 1$ *i rozbieżna gdy* $p \geq 1$.

Przykład: 2. $\int_0^e \ln x dx$.