Ułamki proste

$$\mathrm{I}: \ \frac{A}{(x-a)^n}, \qquad \mathrm{II}: \ \frac{Bx+C}{(px^2+qx+r)^n} \ \ (\Delta < 0)$$

Tw. 1 (O rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste)**.** *Każda funkcja wymierna właściwa rozkłada się jednoznacznie na sumę ułamków prostych.Jeżeli w mianowniku występuje czynnik $(x-a)^n$, to w rozkładzie należy uwzględnić:*

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

Jeżeli w mianowniku występuje czynnik $(px^2+qx+r)^n$, to w rozkładzie należy uwzględnić:

$$\frac{B_1x+C_1}{px^2+qx+r} + \frac{B_2x+C_2}{(px^2+qx+r)^2} + \ldots + \frac{B_nx+C_n}{(px^2+qx+r)^n}.$$

Całkowanie funkcji wymiernych

1. $\int \frac{A}{x+a}dx = A\ln|x+a| + C$
2. $\int \frac{A}{(x+a)^n}dx = -\frac{A}{(n-1)(x+a)^{n-1}} + C$
3. Ułamek prosty drugiego rodzaju, którego licznik jest stałą całkujemy sprowadzając mianownik do postaci kanonicznej.
4. Jeśli licznik zawiera x, to przekształcamy wyrażenie tak, że w liczniku jest pochodna trójmianu z mianownika.

Przykłady: 1. 1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx$

2. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x+5}dx$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}dx$
4. $\displaystyle\int \frac{4x^3+3x^2+2x+1}{x^4+x^2}dx$

Ważne całki z niewymiernościami

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C$
2. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+k}dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+k} + k\ln|x+\sqrt{x^2+k}|] + C$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

4. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}] + C$

Przykłady: 2. 1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}$;

2. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+8x+3}dx$;

3. $\displaystyle\int \sqrt{-x^2+4x}dx$.

Całka oznaczona Riemanna

$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ (gdzie $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$) – podział przedziału $[a,b]$; $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – długość i-tego odcinka podziału; x_i^*- punkty pośrednie ($x_i^* \in [x_i, x_{i-1}]$); $\delta(\mathcal{P}) = \max\{\Delta x_i : 1 \leq i \leq n\}$ – średnica podziału

Def. 1.

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i,$$

o ile granica istnieje i nie zależy od sposobu podziału $\mathcal{P}$ oraz wyboru punktów pośrednich x_i^*.

Uzupełnienie (rozszerzenie) definicji całki

- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx := 0$; $\displaystyle\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$.
- Funkcję, dla której istnieje całka Riemanna na $[a,b]$ nazywamy funkcją *całkowalną* na $[a,b]$.
- Interpretacja geometryczna całki $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ - pole trapezu krzywoliniowego z uwzględnieniem znaku w zależności od położenia obszaru względem osi Ox.

Uwaga 1. Nie każda funkcja ograniczona jest całkowalna np. funkcja Dirichleta na dowolnym przedziale $[a,b]$ nie jest całkowalna.

Tw. 2. *Jeśli funkcja f jest ograniczona na przedziale $[a,b]$ i ma w tym przedziale skończoną ilość punktów nieciągłości I-go rodzaju (tzn. ma w każdym z nich obie granice jednostronne), to jest całkowalna.*

Wzór Newtona-Leibniza i funkcja górnej granicy całkowania

Tw. 3 (Newtona-Leibnitza). *Jeżeli funkcja f jest ciągła na $[a,b]$, to*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f.

Def. 2. Niech f będzie całkowalna na $[a,b]$. Funkcję

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

określoną na przedziale $[a,b]$ nazywamy *funkcją górnej granicy całkowania.*

Tw. 4.

1. *Funkcja górnej granicy całkowania jest ciągła.*
2. *Jeżeli f jest ciągła na $[a,b]$, to funkcja górnej granicy całkowania*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

jest różniczkowalna na $[a,b]$ i $F'(x) = f(x)$.

Przykłady: 3.

1. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$
2. Obliczyć pole obszaru ograniczonego osiami układu współrzędnych, prostą $x = 3$ i wykresem funkcji $f(x) = \sqrt{x+1}$.
3. Wyznaczyć funkcję górnej granicy całkowania dla funkcji $f(x) = \mathrm{sign} x$ na przedziale $[-1,1]$ i następnie funkcję górnej granicy całkowania dla otrzymanej funkcji.